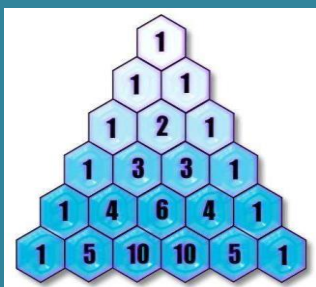
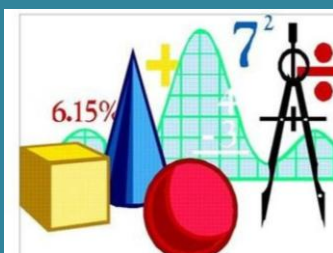
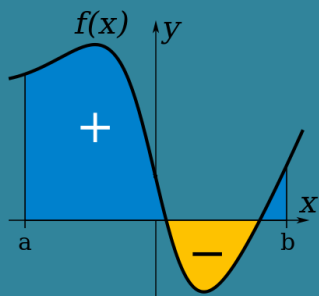




Областное государственное бюджетное  
профессиональное образовательное учреждение  
«Томский политехнический техникум»  
(ОГБПОУ «ТПТ»)



## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

ДЛЯ СТУДЕНТОВ 1 КУРСА  
(НА БАЗЕ 11 КЛАССОВ)

СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

15.02.01 МОНТАЖ И ТЕХНИЧЕСКАЯ  
ЭКСПЛУАТАЦИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО  
ОБОРУДОВАНИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ)

21.02.11 ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ  
ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

Автор: Е.А.Метелькова

**2015**

**Томск**

Метелькова Е.А. Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» для студентов 1 курса (на базе 11 классов) специальностей *15.02.01 МОНТАЖ И ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ), 21.02.11 ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ* .-Томск.: ТПТ, 2015.-59с.

Данное пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальностям 15.02.01 и 21.02.11, на основании рабочей программы по учебной дисциплине «Математика» 2015г.

Рецензенты:

С.И.Пирогова, преподаватель математики ОГБПОУ «ТПТ»

РАССМОТРЕНО

на заседании цикловой методической  
комиссии (ЦМК)  
естественнонаучных дисциплин

УТВЕРЖДАЮ

Заместитель директора по УМР

\_\_\_\_\_Е.А.Метелькова

«\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2015 г.

Председатель ЦМК

\_\_\_\_\_С.И.Пирогова

Протокол № \_\_\_\_ от «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

©Метелькова Е.А., 2015

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	4
<b>Практическая работа № 1-2.</b>	
Задачи на комплексные числа в алгебраической, тригонометрической, геометрической и показательной формах	5
<b>Практическая работа №3.</b>	
Вычисление определителей $2^{\text{го}}$ и $3^{\text{го}}$ порядка. Решение СЛАУ методами Крамера и Гаусса	14
<b>Практическая работа №4.</b>	
Вычисление пределов функций	21
<b>Практическая работа №5.</b>	
Вычисление производной функции	23
<b>Практическая работа №6.</b>	
Исследование функций с помощью производной. Решение прикладных задач на нахождение наибольших и наименьших значений реальных величин.	28
<b>Практическая работа №7.</b>	
Вычисление неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования, подстановки, методом по частям	33
<b>Практическая работа №8.</b>	
Вычисление определенного интеграла	38
<b>Практическая работа №9.</b>	
Приложения определенного интеграла	40
<b>Практическая работа №10.</b>	
Решение задач профильной направленности с применением элементов комбинаторики и вероятностных методов	50
<b>Список источников информации</b>	58
<b>Приложение 1. Таблица значений тригонометрических функций</b>	59

## ВВЕДЕНИЕ

Методические указания по выполнению практических работ по учебной дисциплине «Математика» для студентов 1 курса (на базе 11 классов) специальностей *15.02.01 МОНТАЖ И ТЕХНИЧЕСКАЯ ЭКСПЛУАТАЦИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ОБОРУДОВАНИЯ (ПО ОТРАСЛЯМ), 21.02.11 ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ* разработаны в соответствии с:

- федеральными государственными образовательными стандартами по соответствующим специальностям СПО;
- Рабочими программами учебной дисциплины «Математика» для специальностей 15.02.01, 21.02.11, 2015г.

Практические работы предназначены для развития у студентов:

- абстрактного, логического мышления;
- умения решать уравнения на множестве комплексных чисел, решать системы линейных алгебраических уравнений, вычислять производные, неопределенные и определенные интегралы, решать прикладные, комбинаторные и вероятностные задачи, практические задачи будущей профессиональной деятельности;
- умения работать с инструментами, математическими таблицами;

а также для формирования общих компетенций:

- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество;
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность;
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития;
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями;
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

Методические указания и задания для студентов представляют собой сборник для выполнения 10 практических работ в объеме 20 аудиторных часов.

Практические задания выполняются в группе или индивидуально.

Отчёты по практическим работам следует выполнять в отдельной тетради в клетку, на обложке указать наименование дисциплины, номер группы, Ф.И.О. Практическая работа оформляется чётким подчеркиванием без помарок. Графики функций, схемы следует оформлять с применением чертежных принадлежностей.

## Практическая работа №1-2

4 часа

### ЗАДАЧИ НА КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ, ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ И ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФОРМАХ

#### 1. Цель работы

Закрепление умений и навыков осуществлять перевод комплексного числа из одной формы в другую, выполнять арифметические действия над комплексными числами в разных формах, решать квадратные уравнения на множестве комплексных чисел.

#### 2. Обеспечивающие средства

2.1. Методические указания по выполнению практической работы, таблица значений тригонометрических функций

#### 3. Требования к отчету

3.1. Номер работы, тема, цель.

3.2. Выполнить задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу 1).

3.3. Подготовить ответы на вопросы (в устной форме).

#### 4. Технология выполнения задания

1)  $a+bi$  – алгебраическая форма комплексного числа,

где  $a$  – действительная часть числа,  $b$  – мнимая часть числа.

2) Точка с координатами  $(a;b)$  – геометрическая форма комплексного числа.

3)  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  – тригонометрическая форма комплексного числа,

где  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  – модуль комплексного числа,  $\varphi$  – аргумент числа  $z$ .

$$\cos \varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

4)  $z = re^{i\varphi}$  – показательная форма комплексного числа.

**Пример 1.** Найти сумму, разность и произведение чисел:  $2 + 3i$  и  $5 - 7i$ .

**Решение.**

$$(2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$$

$$(2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$$

$$(2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 17i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i$$

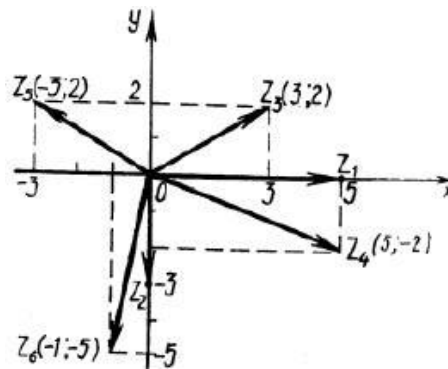
**Пример 2.** Выполнить деление.

$$\frac{3 + 5i}{2 + 6i} = \frac{(3 + 5i)(2 - 6i)}{(2 + 6i)(2 - 6i)} = \frac{6 - 18i + 10i - 30i^2}{4 - 36i^2} = \frac{36 - 8i}{40} = \frac{9}{10} - \frac{1}{5}i.$$

**Решение.**

**Пример 3.** Изобразить на плоскости числа  $z_1 = 5$ ;  $z_2 = -3i$ ;  $z_3 = 3 + 2i$ ;  $z_4 = 5 - 2i$ ;  $z_5 = -3 + 2i$ ;  $z_6 = -1 - 5i$ .

**Решение.** См. Рис1.



**Рис.1.** Геометрическая форма комплексных чисел

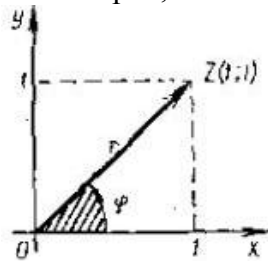
**Пример 4.** Записать в тригонометрической форме комплексные числа  $z_1 = 1 + i$  и  $z_2 = -3i$ .

**Решение.**

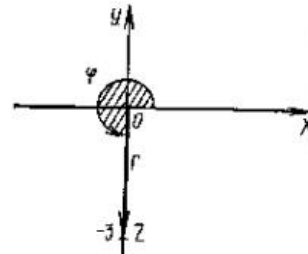
1) Представим первое число в тригонометрической форме.

Так как  $a=1, b=1$ , то  $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

2) Изобразим число  $z$  геометрически (рис. 2). Мы видим, что числу  $z$  соответствует точка  $Z$ , лежащая в I четверти, и вектор  $z$ .



**Рис. 2.**



**Рис. 3.**

3) Составим соотношения  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$  т. е.

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Этим соотношениям соответствует в I четверти угол  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

4) Так как  $r = \sqrt{2}$ ,  $\varphi = 45^\circ$  или  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = 1 + i = \sqrt{2} (\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

5) Представим второе число в тригонометрической форме.

Запишем данное число в виде  $z = 0 - 3i$ . Значит,  $a = 0, b = -3$ , откуда

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

6) Точка, соответствующая геометрически числу  $z = -3i$ , лежит на мнимой оси (рис. 3.).

7) Аргумент этого числа равен  $\frac{3\pi}{2}$ , так как угол отсчитывается от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки.

8) Запишем данное число в тригонометрической форме

$$z = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right).$$

**Пример 5.** Выполнить действия с числами, рассмотренными в примере 4: а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \text{а) } & \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) \cdot 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \\ & = 3\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } & \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) : 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)\right) = \\ & = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\text{в) } \left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^3 = \sqrt{2}^3\left(\cos 3 \cdot \frac{\pi}{4} + i \sin 3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}^3\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$

**Пример 6.** Найдите корни четвёртой степени из числа -1.

**Решение.** Запишем число -1 в тригонометрической форме:

$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi),$$

Тогда

$$z = \sqrt[4]{1} \left( \cos \frac{\pi + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{4} \right), k = 0, 1, 2, 3.$$

При  $k = 0$  получим:

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При  $k = 1$  получим:

$$z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При  $k = 2$  получим:

$$z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При  $k = 3$  получим:

$$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

**Ответ:**  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Пример 7.** Укажите показательную форму числа  $z = -1 + i$ .

**Решение.** Находим модуль и аргумент числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма комплексного числа:  $z = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ .

**Пример 8.** Найдите алгебраическую форму числа  $z = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$ .

**Решение.** По формуле Эйлера:

$$z = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{3} + i.$$

Итак, алгебраическая форма числа:  $z = \sqrt{3} + i$ .

**Пример 9.** Найти произведение и частное чисел, рассмотренных в примерах 7 и 8, а также квадрат второго числа.

**Решение.**

$$а) \left( \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \right) \cdot \left( 2 e^{\frac{\pi}{6}i} \right) = 2\sqrt{2} e^{\left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right)i} = 2\sqrt{2} e^{\frac{11\pi}{12}i}.$$

$$б) \left( \sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}i} \right) : \left( 2 e^{\frac{\pi}{6}i} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\left( \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right)i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{8\pi}{12}i} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

$$в) \left( 2 e^{\frac{\pi}{6}i} \right)^2 = 2^2 \cdot e^{\frac{\pi}{6}i \cdot 2} = 4 e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

**Пример 10.** Представить число  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  в тригонометрической и показательной формах.

**Решение.**

1) Представим число в тригонометрической форме. Так как  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , то

$$r = \sqrt{\left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

2) Числу  $z$  соответствует точка, лежащая в IV четверти.

3) Составим соотношения  $\cos \varphi = \frac{a}{r}$  и  $\sin \varphi = \frac{b}{r}$  т. е.  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Этим соотношениям соответствует в IV четверти угол  $\frac{7\pi}{4}$ .

4) Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид:

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 1 \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

5) Показательная форма заданного комплексного числа имеет вид:  $z = 1e^{i\frac{7\pi}{4}}$ .

**Пример 11.** Решить уравнение  $x^2 - 2x + 5 = 0$ .

**Решение.**

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16$$

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$$

$$X_1 = 1 - 2i; X_2 = 1 + 2i.$$

### 5. Контрольные вопросы

5.1. Что называется комплексным числом?

5.2. Какие числа называются комплексно-сопряженными?



- 5.3. Как геометрически представляется комплексное число?
- 5.4. По какому правилу находится сумма, разность чисел, представленных геометрически?
- 5.5. Что называется модулем числа?
- 5.6. Как записать комплексное число в тригонометрической форме?
- 5.7. Как осуществить переход от записи числа в алгебраической форме к его тригонометрической форме?
- 5.8. Как записать число в показательной форме?
- 5.9. По каким формулам умножаются, делятся, возводятся в степень комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
- 5.10. Что называется формулой Эйлера?

### 6. Литература

- 6.1. Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко «Математика», §1.
- 6.2. А.А. Дадаян «Математика», §§16.1-16.6.

### Таблица вариантов 1

#### Вариант 1

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $(-6+2i)+(-6-2i)$ ; б)  $(4+i)(2-2i)$ ; в)  $\frac{1+4i}{3i-1}$ .
2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-3-i$ ,  $5+3i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = 2-i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = 3\sqrt{2} + 3i\sqrt{2}$ ;  $z_2 = -1 + i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^4$ .
5. Представьте в показательной форме число  $-1 - i\sqrt{3}$ .
6. Представить число  $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ;  $z_2 = -5i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = 6 - i$ ;  $z_2 = -3 - i$
9. Решить уравнение  $z^2 - 6z + 13 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -2 - 2i$ .
11. Вычислите 7-ую степень числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ .
12. Найти все значения корня 9-ой степени из числа  $i$ .

#### Вариант 2

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $-(6+3i)+(5-i)-(4+i)$ ; б)  $(2-i)(7+3i)$ ; в)  $\frac{3-5i}{2-i}$ .

2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-6-2i$ ,  $9+5i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -1-i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ ;  $z_2 = 2 - 2\sqrt{3}i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$
5. Представьте в показательной форме число  $z_1 = 3 + \sqrt{3}i$ .
6. Представить число  $z = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = 2 + i$ ;  $z_2 = 3i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = 2 + i$ ;  $z_2 = 3i$
9. Решить уравнение  $z^2 - 4z + 13 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -1 - 2i$ .
11. Вычислите 6 степень числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ .
12. Найти все значения корня 4-ой степени из числа  $i$ .

### Вариант 3

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $(1-i) \cdot (3+i)$ ; б)  $(4-2i)(5+3i)$ ; в)  $\frac{1-3i}{2-i}$ .
2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-9-8i$ ,  $3+i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -2-2i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ;  $z_2 = 3 - i\sqrt{3}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .
5. Представьте в показательной форме число  $2 + i\sqrt{3}$ .
6. Представить число  $z = 3e^{i\frac{\pi}{6}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = 2 - 2i$ ;  $z_2 = -1 - i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = -7 - 8i$ ;  $z_2 = 9 + i$
9. Решить уравнение  $z^2 + 6z + 13 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -1 - i$ .
11. Вычислите 3-ю степень числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ .
12. Найти все значения корня 8-ой степени из числа  $i$ .

#### Вариант 4

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а)  $(7-2i)-(4+3i)$ ; б)  $(6-i)(2+5i)$ ; в)  $\frac{7-2i}{3+4i}$ .

2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-5-4i$ ,  $4+3i$ .

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -2+2i$ .

4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

$$z_1 = 7 - 7i\sqrt{3}; z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$ .

5. Представьте в показательной форме число  $1+i\sqrt{3}$ .

6. Представить число  $z=6e^{i\pi}$  в алгебраической форме.

7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

$$z_1 = -5 - 5i; z_2 = -\sqrt{3} - i$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$

8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.

$$z_1 = -9 - i; z_2 = 8 + 2i$$

9. Решить уравнение  $z^2 + 2z + 5 = 0$ . Корни изобразить геометрически.

10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -1 - 2i$ .

11. Вычислите 6-ую степень числа  $z = -4+2i$ .

12. Найти все значения корня 10-ой степени из числа  $i$ .

#### Вариант 5

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а)  $(1-6i)-(5+i)$ ; б)  $(-2+8i)(2+8i)$ ; в)  $\frac{9-6i}{3-2i}$ .

2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-9-4i$ ,  $5+i$ .

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -8-4i$ .

4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

$$z_1 = -7 + 7i\sqrt{3}; z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$ .

5. Представьте в показательной форме число  $2 + 2i$ .

6. Представить число  $z=4e^{i\frac{3\pi}{4}}$  в алгебраической форме.

7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

$$z_1 = -2 + 2i\sqrt{3}; z_2 = 1 + 4i$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^2$

8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.

$$z_1 = -3 - i; z_2 = 5 + 2i$$

9. Решить уравнение  $5z^2 + 2z + 2 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = 1 - 2i$ .
11. Вычислите 7-ую степень числа  $z = -2 + 2i$ .
12. Найти все значения корня 6-ой степени из числа  $i$ .

#### Вариант 6

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $(4-i) - (2+3i)$ ; б)  $(3-2i)(4+5i)$ ; в)  $\frac{2-i}{3+2i}$ .
2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-9+8i$ ,  $13+i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -1-2i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = 3\sqrt{2} - 3i\sqrt{2}$ ;  $z_2 = -1 + i$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_2)^6$ .
5. Представьте в показательной форме число  $3 + i\sqrt{3}$ .
6. Представить число  $z = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = -4 - 4i$ ;  $z_2 = -4 + 4i\sqrt{3}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = 6 + 2i$ ;  $z_2 = -7 + i$
9. Решить уравнение  $5z^2 - 2z + 2 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -1 - 2i$ .
11. Вычислите 4-ю степень числа  $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ .
12. Найти все значения корня 3-ей степени из числа  $i$ .

#### Вариант 7

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $(3+5i) - (6+3i)$ ; б)  $(5-4i)(3+2i)$ ; в)  $\frac{2-3i}{4+5i}$ .
2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-2-8i$ ,  $6+3i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -3-5i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $z_2 = 8 - 8i\sqrt{3}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .
5. Представьте в показательной форме число  $2 + i\sqrt{3}$ .

6. Представить число  $z=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^6$ .
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = 5 - i; z_2 = -2 + 3i$
9. Решить уравнение  $z^2 + 2z + 2 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -4 - 2i$ .
11. Вычислите 6-ю степень числа  $z = -3 + 2i$ .
12. Найти все значения корня 5-ой степени из числа  $i$ .

### Вариант 8

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:  
 а)  $-(5-i)-(6+3i)$ ; б)  $(2-i)(7+3i)$ ; в)  $\frac{3-5i}{2+i}$ .
2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-6-2i, 9+5i$ .
3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -1-i$ .
4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:  
 $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{1}{2}; z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .
5. Представьте в показательной форме число  $3 + i\sqrt{3}$ .
6. Представить число  $z = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$  в алгебраической форме.
7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:  
 $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2}; z_2 = 1 + i\sqrt{3}$   
 а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^4$ .
8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.  
 $z_1 = -4 + 2i; z_2 = 1 - 3i$
9. Решить уравнение  $z^2 - 2z + 10 = 0$ . Корни изобразить геометрически.
10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = 1 - 2i$ .
11. Вычислите 2-ю степень числа  $z = -3 + 2i$ .
12. Найти все значения корня 4-ой степени из числа  $i$ .

### Вариант 9

1. Выполнить действия в алгебраической форме записи:

а)  $(8-6i)-(7+i)$ ; б)  $(-5+3i)(5+3i)$ ; в)  $\frac{9-5i}{3-i}$ .

2. Указать числа, сопряжённые данным:  $-12-6i$ ,  $5+4i$ .

3. Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -1-2i$ .

4. Записать комплексные числа в тригонометрической форме и выполнить действия:

$$z_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} - i \frac{\sqrt{5}}{5}; z_2 = 2 - i\sqrt{3}$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^3$ .

5. Представьте в показательной форме число  $2 + i\sqrt{2}$ .

6. Представить число  $z = 10e^{i\frac{3\pi}{2}}$  в алгебраической форме.

7. Выполнить действия над комплексными числами в показательной форме:

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}i - \frac{\sqrt{3}}{3}; z_2 = 1 + i\sqrt{3}$$

а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $z_1 : z_2$ ; в)  $(z_1)^4$ .

8. Изобразить на комплексной плоскости числа, построить их сумму.

$$z_1 = 2 - 3i; z_2 = -5 - i$$

9. Решить уравнение  $2z^2 - 2z + 5 = 0$ . Корни изобразить геометрически.

10. Составить приведённое квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень  $z_1 = -3 - i$ .

11. Вычислите 8-ю степень числа  $z = -1 + i$ .

12. Найти все значения корня 9-ой степени из числа  $i$ .

### Практическая работа №3

2 часа

#### **ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ 2<sup>ГО</sup> И 3<sup>ГО</sup> ПОРЯДКА. РЕШЕНИЕ СЛАУ МЕТОДАМИ КРАМЕРА И ГАУССА.**

##### **1.Цель работы**

Закрепление умений и навыков решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) второго и третьего порядков методами Крамера, Гаусса; закрепление навыка вычисления определителей второго и третьего порядков.

##### **2.Обеспечивающие средства**

- 2.1.Методические указания по выполнению практической работы.

##### **3.Требования к отчету**

- 3.1.Номер работы, тема, цель.  
3.2.Выполнить задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 2).  
3.3.Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

##### **4.Задание**

- 4.1. Вычислить определитель второго порядка. Записать ответ.

- 4.2. Вычислить определитель третьего порядка. Записать ответ.  
 4.3. Решить СЛАУ второго порядка методом Крамера.  
 4.4. Решить СЛАУ третьего порядка: а) методом Крамера;  
 б) методом Гаусса.  
 4.5\*. Вычислить определитель второго порядка. Записать ответ.  
 4.6\*. Решить уравнение.

### 5. Технология выполнения заданий

*Матрица* – это прямоугольная таблица каких-либо элементов. В качестве элементов мы будем рассматривать числа.

Обозначение: матрицы обычно обозначают прописными латинскими буквами  $A, B, C, \dots$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Например, матрица «два на три»:

Определителем второго порядка называется выражение вида:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Определитель третьего порядка вычисляется с помощью формулы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_3 b_1 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

### Решение систем с помощью формул Крамера

Рассмотрим систему уравнений второго порядка  $\begin{cases} a_1 x + b_1 y = s_1 \\ a_2 x + b_2 y = s_2 \end{cases}$ .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

На первом шаге вычислим определитель  $\Delta$ , его называют *главным определителем системы*.

Если  $\Delta = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение, и для нахождения корней мы должны вычислить еще два определителя:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 \\ s_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 \\ a_2 & s_2 \end{vmatrix}$$

Корни уравнения находим по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Рассмотрим правила Крамера для системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = s_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = s_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 = s_3 \end{cases}$$

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Если  $\Delta = 0$ , то система имеет бесконечно много решений или несовместна (не имеет решений). В этом случае правило Крамера не поможет, нужно использовать метод Гаусса.

Если  $\Delta \neq 0$ , то система имеет единственное решение и для нахождения корней мы должны вычислить еще три определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} s_1 & b_1 & c_1 \\ s_2 & b_2 & c_2 \\ s_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & s_1 & c_1 \\ a_2 & s_2 & c_2 \\ a_3 & s_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & s_1 \\ a_2 & b_2 & s_2 \\ a_3 & b_3 & s_3 \end{vmatrix}$$

И, наконец, ответ рассчитывается по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

### Решение систем методом Гаусса

Вновь рассмотрим систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие  $x_1$ . Для этого второе уравнение разделим на  $a_{21}$  и умножим на  $-a_{11}$ , а затем сложим с 1-ым уравнением. Аналогично третье уравнение разделим на  $a_{31}$  и умножим на  $-a_{11}$ , а затем сложим с первым. В результате исходная система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3. \end{cases}$$

Теперь из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее  $x_2$ . Для этого третье уравнение разделим на  $a'_{32}$ , умножим на  $-a'_{22}$  и сложим со вторым. Тогда будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Отсюда из последнего уравнения найдем  $x_3$ , затем из 2-го уравнения  $x_2$  и, наконец, из 1-го —  $x_1$ .

При использовании метода Гаусса уравнения при необходимости можно менять местами.

Часто вместо того, чтобы писать новую систему уравнений, ограничиваются тем, что выписывают *расширенную матрицу системы*:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array} \right)$$

и затем приводят её к треугольному или диагональному виду с помощью элементарных преобразований.



К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1. перестановка строк или столбцов;
2. умножение строки на число, отличное от нуля;
3. прибавление к одной строке другие строки.

**Пример 1.** Решить СЛАУ по формулам Крамера.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

**Решение.** Найдем главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot (-1) -$$

$$-4 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot (-1) = -12 + 8 - 12 -$$

$$-32 - 6 - 6 = 8 - 68 = -60 \neq 0, \text{ значит, система имеет единственное}$$

решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & -2 & 4 \\ 9 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 21 \cdot 4 \cdot (-1) + 10 \cdot (-2) \cdot (-2) + 4 \cdot 9 \cdot (-1) -$$

$$-4 \cdot 4 \cdot 10 - 21 \cdot (-2) \cdot (-1) - 9 \cdot (-2) \cdot (-1) = -84 + 40 - 36 -$$

$$-160 - 42 - 18 = 40 - 340 = -300$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 & 4 \\ 3 & 9 & -2 \\ 2 & 10 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 9 \cdot (-1) + 2 \cdot 21 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 \cdot 10 -$$

$$-4 \cdot 9 \cdot 2 - 10 \cdot (-2) \cdot 3 - 3 \cdot 21 \cdot (-1) = -27 - 84 + 120 -$$

$$-72 + 60 + 63 = 243 - 183 = 60$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 21 \\ 3 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 10 + 2 \cdot 9 \cdot (-2) + 21 \cdot 3 \cdot (-1) -$$

$$-21 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 9 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) \cdot 10 = 120 - 36 - 63 -$$

$$-168 + 27 + 60 = 207 - 267 = -60$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-300}{-60} = 5$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{60}{-60} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-60}{-60} = 1$$

**Ответ:**  $x_1 = 5, x_2 = -1, x_3 = 1$ .

**Пример 2.** Решить СЛАУ методом Гаусса.

а)

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, \\ 4x - 5y + 2z = 1, \\ 5x - 6y + 4z = 3. \end{cases}$$

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-4)} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -6 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\times 5} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & 2 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(3)^+} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Вернувшись к системе уравнений, будем иметь

$$\begin{cases} 3x - 3y + 2z = 2, & x = 1, \\ -3y - 2z = -5, & y = 1, \\ 4z = 4. & z = 1. \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 5, \\ x - 5y + 2z = 3, \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

Выпишем расширенную матрицу системы и сведем ее к треугольному виду.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-3)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 13 & -3 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 5 \\ 0 & 13 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

Вернувшись к системе уравнений, заметим, что третье уравнения системы будет ложным, а значит, система решений не имеет.

в)

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ 4x + 6y - 2z = 6, \\ 3x - y + 2z = -1. \end{cases} \quad \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

Разделим вторую строку матрицы на 2 и поменяем местами первый и третий столбики. Тогда первый столбец будет соответствовать коэффициентам при неизвестной  $z$ , а третий – при  $x$ .

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\times 2} \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 3, \\ 0 = 0, \\ 7x + 5y = 5. \end{cases}$$

Вернемся к системе уравнений.

Из третьего уравнения выразим одну неизвестную через другую и подставим в первое.

$$\begin{cases} y = 1 - \frac{7}{5}x, \\ 2x + 3 - \frac{21}{5}x - z = 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = 1 - \frac{7}{5}x, \\ z = -\frac{11}{5}x. \end{cases}$$

Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

### 6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что называется определителем второго порядка? Каким знаком он обозначается?
- 6.2. Что называется определителем третьего порядка? Приведите пример.
- 6.3. Какие СЛАУ называются совместными и несовместными?
- 6.4. В чем суть решения СЛАУ методом Крамера?
- 6.5. При каком значении главного определителя СЛАУ имеет одно решение?
- 6.6. При каком значении главного определителя СЛАУ имеет бесконечное множество решений?
- 6.7. В чем суть решения СЛАУ методом Гаусса?

### 7. Литература

- 7.1. Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко «Математика», §7.
- 7.2. А.А. Дадаян «Математика», §§4.5-4.7.

Таблица вариантов 2

№ вар.	Задания				
	1	2	3	4	*
1, 18	$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 2x + y - 4z = 9 \\ 6x - 5y + 2z = 17 \end{cases}$	5) Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$ .
2, 19	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 16 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2x + 7y + 5z = 18 \\ x + 4y + 6z = 26 \end{cases}$	
3, 20	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + 5z = -3 \end{cases}$	
4, 21	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0.7 & -5 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 4z = 31 \\ 5x + y + 2z = 29 \\ 3x - y + z = 10 \end{cases}$	$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

5, 22	$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} -x + y - 4z = -11 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$	5) Вычислить определитель
6, 23	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x + 4y = -1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$	
7, 24	$\begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x - y = -7 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2 + y + 2z = -3 \end{cases}$	
8, 25	$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 5x - 2y = 11 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - 3y + 2z = 2 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$	
9, 26	$\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 3x + 5y = 12 \\ x - 2y = -7 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 0 \\ x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$	6) Решить уравнение
10, 27	$\begin{vmatrix} 11 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 7 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 5x - 3y = 3. \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 2z = 5 \\ 3x + 2y + z = 10 \\ -x + y - 4z = -11 \end{cases}$	
11, 28	$\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -6 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 9 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} y - 3x = -5, \\ 2y + 5x = 23. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$	
12, 29	$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 5 \\ 7 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x + y = 6, \\ 5x - 2y = 9. \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3; \end{cases}$	
13, 30	$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 7 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x - 2y = 9 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7; \end{cases}$	
14, 31	$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ -x + 3y = 7 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 1, \\ 5x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 2; \end{cases}$	

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

15, 32	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -7 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x + 3y = -3 \\ -x + y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5; \end{cases}$	
16, 33	$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 5x - 2y = 7 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6; \end{cases}$	
17, 34	$\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 5 \\ 7 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$	$\begin{cases} 2x - 3y = -3 \\ -6x + 9y = 9 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$	

## Практическая работа №4

### 2 часа

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ**

### *1. Цель работы*

Закрепить умения:

-вычислять пределы функций, раскрывать математические неопределенности с применением первого и второго «замечательных» пределов.

### *2. Обеспечивающие средства*

2.1. Методические указания по выполнению практической работы.

### *3. Требования к отчету*

3.1. Номер работы, тема.

3.2. Выполнить задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 3).

3.3. Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

### *4. Практическое задание*

4.1. Вычислить пределы функций.

### *5. Технология выполнения заданий*

#### Вычисление пределов

1. Подставить число в функцию:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = \begin{cases} m \\ \frac{m}{0} = \infty, \text{ где } m \in R \\ \frac{m}{\infty} = 0, \text{ где } m \in R \\ \frac{0}{0}, \text{ см. п. 2} \\ \frac{\infty}{\infty}, \text{ см. п. 3} \\ 1^\infty, \text{ см. п. 4} \\ \infty - \infty, \text{ см. п. 5} \end{cases}$$

2. Для раскрытия неопределенности вида  $\frac{0}{0}$  применяют способы:
- А) вынесение общего множителя за скобки;
  - Б) разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения;
  - В) разложение квадратного трехчлена на множители:  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ .
  - Г) приведение к первому «замечательному» пределу:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .
  - Д) домножение числителя и знаменателя дроби на выражение, сопряженное знаменателю.
3. Для раскрытия неопределенности вида  $\frac{\infty}{\infty}$  применяют деление числителя и знаменателя дроби на переменную в старшей степени.
4. Для раскрытия неопределенности вида  $1^\infty$  применяют приведение ко второму «замечательному» пределу:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$  или  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ .
5. Для раскрытия неопределенности вида  $\infty - \infty$  применяют умножение и деление на выражение, сопряженное данной функции  $f(x)$ .

### 6. Контрольные вопросы

- 6.1. Понятие предела функции.
- 6.2. Теоремы о пределах.
- 6.3. Первый и второй «замечательные» пределы.

### 7. Литература

- 7.1. Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко «Математика», §§42-44.
- 7.2. А.А. Дадаян «Математика», §9.2.

### Таблица вариантов 3

#### Вариант 1

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 5x^2 - 2); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{5x};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

#### Вариант 2

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-3}; \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2+3x-10}{x^2-25}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2-11x+5}{x^2-4x-5}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-4x+2}{5+3x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{3x}\right)^x$$

#### Вариант 3

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x+7}{5-x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-4x}{x^2-2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}; \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1};$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6} + x\right)}{6x + \pi}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n}\right)^n$$

#### Вариант 4

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 + 2x}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{x^2 - 16}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 7} - 3}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x};$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x$$

#### Вариант 5

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 + 8x + 15}; \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{9 - x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x} - \sqrt{4 - x}}{4x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1};$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{n+3}$$

#### Вариант 6

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 4x - 3}{x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{5x - x^2}{x^2 - 25}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{2 - \sqrt{4 + x + x^2}};$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 3x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

#### Вариант 7

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 7x + 4); \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{3 - x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a + 2x} - \sqrt{a - 2x}}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{1 + x^4};$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 2}{x}\right)^{2x}$$

#### Вариант 8

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 5x - 6); \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{3 - \sqrt{2x + 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x - 1}{x^2 - 1};$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{3x}$$

#### Вариант 9

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + 2^x); \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 4x - 21}{x - 7}; \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5 - x} - 2}{\sqrt{2 - x} - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 7}{5x^3 + x^2 - 3};$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x + \sin 4x}{x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3tg^2 x)^{ctg^2 x}$$

#### Вариант 10

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x + 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4 + x + x^2} - 2}{x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x}{1 - 5x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x};$$
$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \left(\frac{n - 3}{n}\right)^{\frac{n}{2} + 2}$$

### Практическая работа №5

2 часа

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ

#### 1. Цель работы

Закрепить умения:

- находить производную функции первого порядка по определению и с применением формул и правил дифференцирования;
- находить производную сложной функции;
- находить производную второго порядка.

## **2.Обеспечивающие средства**

2.1.Методические указания по выполнению практической работы, таблицы производных.

## **3.Требования к отчету**

- 3.1.Номер работы, тема.
- 3.2.Выполнить задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 4).
- 3.3.Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

## **4.Практическое задание**

- 4.1. Найти производную функции по определению.
- 4.2. Найти производную функции, используя таблицы производных и правила дифференцирования.
- 4.3. Найти производную второго порядка.
- 4.4. Найти производную сложной функции.

## **5. Технология выполнения заданий**

### **Определение производной функции**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

### **Правила дифференцирования**

1.  $(Cf(x))' = C(f(x))'$
2.  $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
3.  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
4.  $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
5.  $g(f(x))' = g'(f(x))f'(x)$

### **Таблица производных для элементарных функций**

$C' = 0, x' = 1; (kx + b)' = k;$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$
$(x^n)' = nx^{n-1};$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(e^x)' = e^x;$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$
$(a^x)' = a^x \ln a;$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$
$(\ln x)' = \frac{1}{x};$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$
$(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e; (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(x^x)' = x^x (1 + \ln x);$
$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$	
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	



**Сложная функция** – это функция, аргументом которой также является функция. Часто сложную функцию называют **композицией функций**.

**Формула нахождения производной сложной функции**

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

**Пример 1.** Найти производную функции по определению  $y(x) = \frac{1}{x}$ .  
**Решение.** По определению производной

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x (x + \Delta x)x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(x + \Delta x)x} = - \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Найти производную функции  $f(x) = 2x - 5x^3 + \sqrt{3}$ .

**Решение.**  $f'(x) = 2(x)' - 5(x^3)' + \sqrt{3}' = 2 - 5 \cdot 3x^2 + 0 = 2 - 15x^2$

Применили формулы:  $x' = 1$ ,  $(x^n)' = n x^{n-1}$ ,  $c' = 0$ .

**Пример 3.** Найти производную функции  $y = \frac{x^3}{2^x + 3}$ .

**Решение.**

$$y' = \frac{(x^3)'(2^x + 3) - x^3(2^x + 3)'}{(2^x + 3)^2} = \frac{3x^2(2^x + 3) - x^3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 3)^2} = \frac{x^2(3 \cdot 2^x + 9 - x \cdot 2^x \cdot \ln 2)}{(2^x + 3)^2}$$

Применили правила 2, 4 и формулы  $(x^n)' = n x^{n-1}$ ,  $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ,  $c' = 0$ .

**Пример 4.** Найти производную функции  $f(x) = 3e^{4x} - 2\cos 3x + \operatorname{tg} 3x$

**Решение.**  $f'(x) = 3(e^{4x})' - 2(\cos 3x)' + (\operatorname{tg} 3x)' = 3e^{4x} \cdot 4 - 2(-\sin 3x) \cdot 3 + \frac{1 \cdot 3}{\cos^2 3x} =$

$$= 12e^{4x} + 3\sin 3x + \frac{3}{\cos^2 3x}.$$

Применили формулы:  $(e^{nx})' = n \cdot e^{nx}$ ,  $(\cos nx)' = -n \cdot \sin nx$ ,  $(\operatorname{tg} nx)' = \frac{n}{\cos^2 nx}$ .

**Пример 5.** Найти производную второго порядка для функции  $f(x) = 2x - 5x^3 + \sqrt{3}$

**Решение.** См. пример 2:  $f'(x) = 2 - 15x^2$ ;  $f''(x) = 0 - 15 \cdot 2x = -30x$ .

**Пример 6.** Найти производные сложных функций  $y = \sin^2 x$  и  $y = \sin x^2$ .

**Решение.** В первом случае  $f$  – это функция возведения в квадрат, а  $g(x)$  – функция

синуса, поэтому  $y' = (\sin^2 x)' = 2 \cdot \sin^{2-1} x \cdot (\sin x)' = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ .

Во втором случае  $f$  – это функция синуса, а  $g(x) = x^2$  – степенная функция. Следовательно, по формуле произведения сложной функции имеем

$$y' = (\sin x^2)' = \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

### 6. Контрольные вопросы

6.1. Определение производной функции. Что такое мгновенная скорость изменения функции?

6.2. Правила нахождения производной функции. Что называется производной второго порядка?

6.3. Определение сложной функции. Как находится производная сложной функции?

### 7. Литература

7.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §§46-47, 50-54.

7.2. А.А.Дадаян «Математика», §§9.5-9.7.

### Таблица вариантов 4

#### Вариант 1

1  $y = 6x - 3$

2  $y = x - 3$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $y = x - \operatorname{tg} x$ ;  $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$

3  $f(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - 9$

4  $y = \ln e^{2x}$ ;  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$ ;  $y = 9^{\sin 5x}$

#### Вариант 2

1  $y = x^2 + 1$

2  $y = 6x - 2$ ;  $y = x^2 - 4$ ;  $S = 2\sqrt{x}$ ;  $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$

3  $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + 3$

4  $y = \sqrt{\sin 2x}$ ;  $f(x) = e^{\operatorname{ctg} x}$ ;  $f(x) = \ln \sin x$

#### Вариант 3

1  $y = x^2 - 4$

2  $y = 6x - 3$ ;  $y = x^2 + 1$ ;  $S = 6\sqrt{x}$ ;  $f(x) = (1 + \sin x) \cos x$

3  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

4  $f(x) = e^{3x}$ ;  $f(x) = \frac{1}{3} \sin^3 2x$ ;  $f(x) = \ln \sin(2x - 1)$

#### Вариант 4

1  $y = 3x^2 - 2x$

2  $y = 4x - 3$ ;  $y = 3x^2 - 2x$ ;  $y = 9^x$ ;  $f(x) = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

3  $f(x) = \frac{4}{3}x^6 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{1}{4}x - 5$

4  $z = \operatorname{tg}^3 x$ ;  $f(x) = \frac{1}{4} \sin^4 3x$ ;  $y = 8^{\cos 3x}$

#### Вариант 5

1  $y = x^2 - 4x$

$$2 \quad y = 6x + 3; \quad y = x^2 - 5x; \quad f(x) = 3x^2 - 7x^{-1} + 2; \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$$

$$4 \quad u = \ln x \cdot \cos 4x; \quad f(x) = \cos^2 x; \quad y = \sqrt[3]{\sin^2 x}$$

#### Вариант 6

$$1 \quad y = 5x^2 + 3x$$

$$2 \quad y = 6x - 1; \quad y = 3x^2 + 5x; \quad y = \frac{1 - x^3}{x^2 + 1}; \quad f(x) = (10 - \sin x) \cos x$$

$$3 \quad f(x) = \frac{3}{4}x^8 - \frac{7}{2}x^4 + \frac{1}{3}x - 2$$

$$4 \quad y = 8^{3x}; \quad f(x) = x^3 \sin 5x; \quad y = \sqrt[3]{\sin^4 5x}$$

#### Вариант 7

$$1 \quad y = x^2 - 3x$$

$$2 \quad y = 7x - 2; \quad y = 1,5x^2 + 1; \quad S = \ln x \cdot 5x; \quad f(x) = \frac{2 - \cos x}{\sin x}$$

$$3 \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$$

$$4 \quad f(x) = \arctg 3x; \quad f(x) = e^{tg x}; \quad y = \sqrt[3]{\sin^2 6x}$$

#### Вариант 8

$$1 \quad y = 2x - 4$$

$$2 \quad y = 2x - 4; \quad y = x^2 + 8x; \quad z = \frac{1 + 2x}{1 - 2x}; \quad f(x) = (10 - \sin x)x$$

$$3 \quad f(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{7}{4}x^2 + \frac{1}{6}x + \pi$$

$$4 \quad y = (x^2 - 5x + 4)^3; \quad y = \arcsin \sqrt{1 - x^2}; \quad f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

#### Вариант 9

$$1 \quad y = x^2 + 5x$$

$$2 \quad y = 6,9x - 3; \quad y = x^2 - 9; \quad f(x) = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}; \quad f(x) = (10 - 2x) \cos x$$

$$3 \quad f(x) = \frac{x^4 - x}{x}$$

$$4 \quad f(x) = \sqrt{\ln tg x}; \quad f(x) = \arctg \frac{x^3}{3}; \quad f(x) = \sin \frac{2}{x}$$

#### Вариант 10

$$1 \quad y = 2x^2 - x$$

$$2 \quad y = 2x - 3; \quad y = 2x^2 - 0,1x; \quad f(x) = \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x}; \quad f(x) = (x - \sin x) \cos x$$

$$3 \quad f(x) = \frac{4}{3}x^9 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{4}x - 2e$$

$$4 \quad f(x) = \ln \cos x; \quad f(x) = 7^{\ln \sin 5x}; \quad f(x) = 5 \sin \frac{2}{x}$$

## Практическая работа №6

2 часа

### **ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ. РЕШЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ РЕАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН.**

#### **1.Цель работы**

Закрепить умение применять производную функции первого порядка при определении промежутков монотонности и точек экстремума функции, при нахождении наибольшего и наименьшего значений функции на заданном отрезке; формировать умение строить схематически график функции. Закрепить умение применять производную функции при решении задач физики, геометрии, математического анализа.

#### **2.Обеспечивающие средства**

2.1.Методические указания по выполнению практической работы, таблицы производных, карандаш, линейка.

#### **3.Требования к отчету**

3.1.Дата, номер работы, тема.

3.2.Изучить технологию исследования функции с помощью производной первого порядка.

3.3.Выполнить практическое задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 5) .

#### **4.Технология исследования функции с помощью производной**

Достаточный признак монотонности функции в интервале: если функция имеет положительную (отрицательную) производную в каждой точке интервала, то функция возрастает (убывает) на этом интервале.

Достаточные условия существования экстремума<sup>1</sup>.

Теорема 1. Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) > 0$  на интервале  $[a, x_0]$  и  $f'(x) < 0$  на интервале  $[x_0, b]$ , то  $x_0$  является точкой максимума функции  $f(x)$ .

Теорема 2. Если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ ,  $f'(x) < 0$  на интервале  $[a, x_0]$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $[x_0, b]$ , то  $x_0$  является точкой минимума функции  $f(x)$ .

#### **Алгоритм нахождения экстремумов функции**

1. Найти область определения функции.
2. Найти производную функции.
3. Найти критические точки<sup>2</sup>.
4. Определить знак производной на каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область определения.
5. Найти точки экстремума, учитывая характер изменения знака производной.
6. Найти экстремумы функций.

#### **Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке**

1. Найти критические точки функции.
2. Найти значения функции в критических точках, принадлежащих интервалу  $(a; b)$ .
3. Найти значения функции на концах отрезка  $[a; b]$ .
4. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

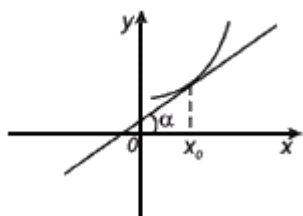
Геометрический смысл производной: производная в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке:

$$k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha \quad (6.1)$$

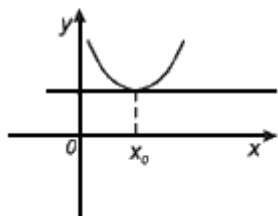
<sup>1</sup>  $x_0$  - точка максимума (минимума) называются **точками экстремума**.

$f(x_0)$  – максимум (минимум) функции называются **экстремумами функции**.

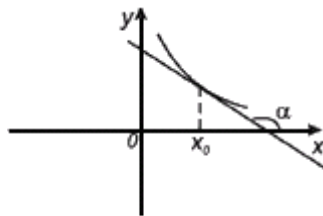
<sup>2</sup> **Критические точки** – это внутренние точки области определения функции, в которых производная не существует или равна нулю.



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = 0$$



$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$$

Уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $(x_0, f(x_0))$  имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (6.2)$$

Физическое приложение производной: при прямолинейном движении точки скорость в данный момент времени есть производная от пути по времени, вычисленная для момента времени; ускорение в данный момент времени есть производная от скорости по времени, вычисленная для момента времени:

$$v(t_0) = x'(t_0) \quad (6.3)$$

$$a(t_0) = v'(t_0) = x''(t_0) \quad (6.4)$$

**ПРИМЕР 1.** Исследовать функцию  $y = x^3 + 6x^2 + 9x$  с помощью производной и построить график.

1)  $D(y) = \mathbb{R}$

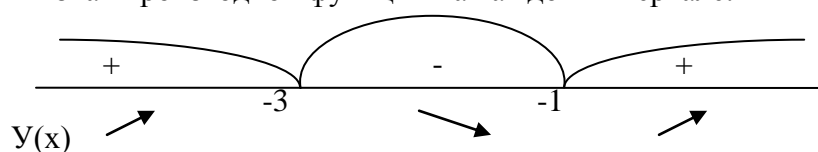
2) Найдем производную функции:  $y' = (x^3 + 6x^2 + 9x)' = 3x^2 + 12x + 9$

3) Определим критические точки:  $y' = 0$ , т.е.

$$3x^2 + 12x + 9 = 0$$

Решив квадратное уравнение, получим корни:  $x_1 = -1$  и  $x_2 = -3$ .

4) Обозначим критические точки на координатной прямой и определим знак производной функции на каждом интервале:



$x = -4, y' = 3 \cdot 16 - 48 + 9 = 9 > 0$

$x = -2, y' = 12 - 24 + 9 = -3 < 0$

$x = 0, y' = 0 + 0 + 9 = 9 > 0$

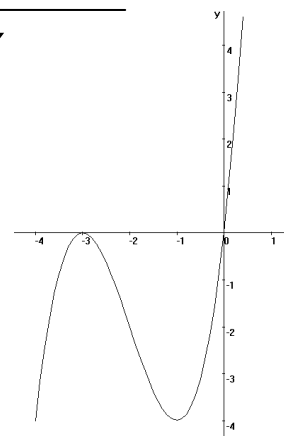
5) Найдем точки экстремума:

$x_{\min} = -1, \quad x_{\max} = -3.$

6) Найдем экстремумы функции:

$y_{\min} = y(-1) = -1 + 6 - 9 = -4, \quad y_{\max} = y(-3) = -27 + 54 - 27 = 0.$

7) Построим график функции.



**ПРИМЕР 2.** Исследовать функцию  $y = \frac{x^2}{x-2}$  и построить график.

график.

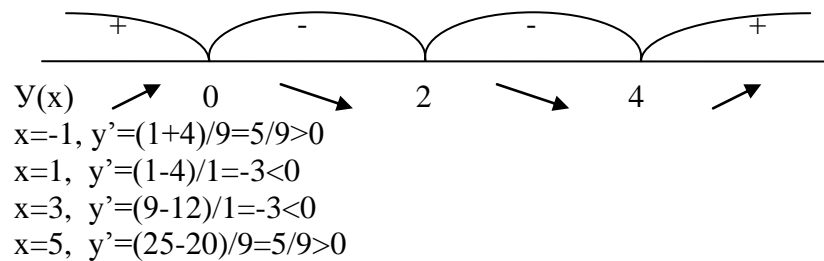
1) Найдем область определения:  $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ;  $x = 2$  – вертикальная асимптота.

2) Найдем производную функции:  $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ .

3) Определим критические точки:

$$y' = 0, \quad \begin{cases} x^2 - 4x = 0 \\ (x-2)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-4) = 0 & x=0, x=4 \\ x \neq 2 \end{cases}$$

4) Обозначим критические точки на координатной прямой и определим знак производной функции на каждом интервале:

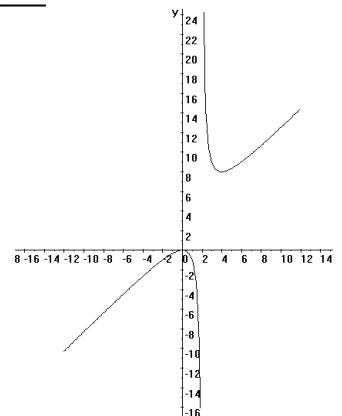


5) Найдем точки экстремума:  $x_{\min}=4, x_{\max}=0$ .

6) Найдем экстремумы функции:

$$y_{\min}=y(4)=16/2=8, \quad y_{\max}=y(0)=0$$

7) Построим график функции.



**ПРИМЕР 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y = x^3 - 12x + 7$  на отрезке  $[-3, 0]$ .

РЕШЕНИЕ. 1) Ищем производную и приравняем её нулю:  $y' = 3x^2 - 12, 3(x^2 - 4) = 0$ .

Корни уравнения  $x = \pm 2$  являются критическими точками, но промежутку принадлежит только  $x = -2$ .

2) Подсчитываем значение функции в критической точке  $y(-2) = 23$ .

3) Подсчитываем значения функции на концах промежутка:  $y(-3) = 16$  и  $y(0) = 7$ .

4) Среди них наибольшее  $y(-2) = 23$ , наименьшее  $y(0) = 7$ .

ОТВЕТ:  $y_{\max}(-2) = 23, y_{\min}(0) = 7$  на отрезке  $[-3, 0]$ .

**ЗАДАЧА 4.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = t^2 - 13t + 23$ , где  $x$  - расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  - время в секундах, измеренное с начала движения. В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

РЕШЕНИЕ. Если нам известна скорость точки в некий момент времени, следовательно, нам известно значение производной в точке  $t_0$ .

Найдем производную функции  $x(t) = t^2 - 13t + 23, x'(t) = 2t - 13$ .

По условию, скорость точки равна 3 м/с, поэтому значение производной в момент времени  $t_0$  равно 3.

$$x'(t_0) = 2t_0 - 13 = 3$$

Получаем уравнение:

$$t_0 = 8$$

ОТВЕТ: 8с.

**ЗАДАЧА 5.** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = x^3$  в точке  $x_0 = 2$ .

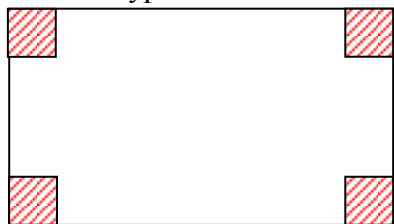
РЕШЕНИЕ. Найдем значение функции:  $f(x_0) = f(2) = 2^3 = 8$ .

Теперь найдем производную:  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ .

Подставляем в производную  $x_0 = 2$ :  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$ .

Получаем:  $y = 12 \cdot (x - 2) + 8 = 12x - 24 + 8 = 12x - 16$ .

ОТВЕТ: уравнение касательной  $y = 12x - 16$ .



**ЗАДАЧА 6.** Сергей решил сделать своей маме подарок к 8 Марта и заказал шкатулку из драгоценного металла. В мастерскую он принес кусок листа из этого металла размером 80 х 50 см. Требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и загибая оставшиеся кромки.

**РЕШЕНИЕ.** Обозначим через  $x$  длину стороны вырезаемого

квадрата. При этом  $0 < x < 25$ .

Объем при этом у коробки:

$$V = x(80 - x)(50 - 2x) = 4x^3 - 260x^2 + 4000x.$$

$$V' = 12x^2 - 520x + 4000 = 0,$$

$$x_1 = 100:3 = 33\frac{1}{3}, \quad x_2 = 10.$$

$x_1$  - посторонний корень по смыслу задачи.  $x_2 = 10$  – единственное решение – высота,  $80 - 20 = 60$  – длина,  $50 - 20 = 30$  – ширина.

$$V = 10 \cdot 60 \cdot 30 = 18000(\text{см}^3).$$

ОТВЕТ: коробка будет иметь измерения 10, 30 и 60см.

### 5. Практическое задание

1. Найти:

а) экстремумы функции  $y$  (см.таблицу вариантов 5);

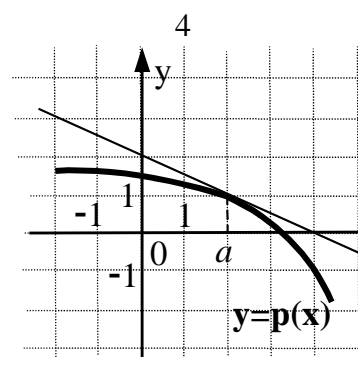
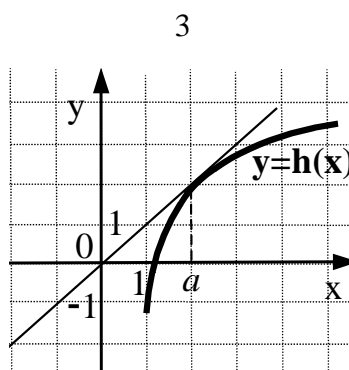
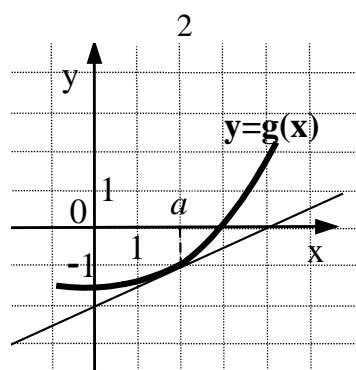
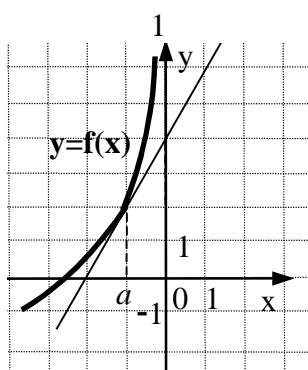
б) промежутки монотонности функции  $y$ .

Построить график функции.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции  $y$  на указанном отрезке (см.таблицу вариантов 6).

3. Два тела движутся со скоростью  $v_1 = t^3 - 6t + 1$  и  $v_2 = \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 - \frac{15}{2}$ . В какой момент времени их ускорения будут равны?

4. На рисунках изображены графики функций и касательные к ним в точке  $a$ . Укажите функцию, производная которой в точке  $a$  равна 1.



5. Составить уравнение касательной к параболе  $y = x^2 - 6x + 5$  в точке  $x = 4$ .

6. Каким должен быть прямоугольник наибольшей площади, который можно согнуть из куска проволоки длиной 50см?

7. Закон движения тела, брошенного вертикально, задан уравнением  $S = 19,6t - 4,9t^2$ . Найдите наибольшую высоту подъема тела. Здесь  $S$ -путь (м),  $t$ -время (с).

Таблица вариантов 5

№ вар.	Функция	Отрезок	№ вар.	Функция	Отрезок
1	$y=(x-3)^2(x-2)$	[1;4]	19	$y=\frac{1-x}{x^2+3}$	[-2;5]
2	$y=\frac{1}{3}x^3+x^2$	[-4;1]	20	$y=-x^4+2x^2+3$	[-0,5;2]
3	$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$	[-2;6]	21	$y=2x^4-x$	[-2;2]
4	$y=-\frac{1}{4}x^4+2x^2+1$	[-3;3]	22	$y=-x^3+9x^2-24x+10$	[0;3]
5	$y=x^4-8x^2-9$	[-3;3]	23	$y=x^5-5x^4+5x^3+1$	[-10;10]
6	$y=(x-2)(x+1)^2$	[-1,5;1,5]	24	$y=x^3-3x^2+9x+35$	[-4;4]
7	$y=-\frac{2}{3}x^3+2x-\frac{4}{3}$	[-1,5;1,5]	25	$y=x^3-3x$	[-0,5;0,5]
8	$y=3x^5-5x^4+4$	[-1;1]	26	$y=x^4-8x^2-9$	[0;3]
9	$y=9x^2-9x^3$	[-0,5;1]	27	$y=x^4-8x^2-9$	[-1;1]
10	$y=\frac{1}{3}x^3-4x$	[-3;3]	28	$y=x^3+3x^2-9x$	[-4;0]
11	$y=2x^4-x$	[-1;1]	29	$y=x^3+3x^2-9x$	[2;4]
12	$y=x^2-\frac{2}{x}$	[-3;-0,5]	30	$y=2x^3-9x^2+12x-3$	[0;3]
13	$y=\frac{1}{x^2+1}$	[-1;2]	31	$y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$	[1;3]
14	$y=3x-x^3$	[-1,5;1,5]	32	$y=\frac{x^3}{3}+x^2-3x+2$	[-10;10]
15	$y=2x^2-x^4$	[-2;1,5]	33	$y=2x^3-9x^2+12x-8$	[0;5]
16	$y=3x^{\frac{2}{3}}-x^2$	[-8;8]	34	$y=2x^3-3x^2-12x+8$	[0;5]
17	$y=3x^{\frac{1}{3}}-x$	[-8;8]	35	$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{1}{3}$	[-1;3]
18	$y=x^3-1,5x^2-6x+4$	[-2;3]	36	$y=x^3-6x^2+9x-3$	[-1;3]

## 6. Литература

- 6.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §55, 56.  
6.2. А.А.Дадаян «Математика», §9.9, 9.10.



## Практическая работа №7

2 часа

### **ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ПОДСТАНОВКИ, МЕТОДОМ ПО ЧАСТЯМ**

#### **1.Цель работы**

Закрепить умения вычислять неопределённые интегралы разными методами, применять неопределённые интегралы при решении задач физики и геометрии.

#### **2.Обеспечивающие средства**

2.1.Методические указания по выполнению практической работы, таблицы интегралов.

#### **3.Требования к отчету**

3.1.Дата, номер работы, тема.

3.2. Выполнить практическое задание в соответствии с данными своего варианта (см.таблицу вариантов б).

3.4. Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

#### **4.Практическое задание**

4.1. Вычислить неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования.

4.2. Вычислить неопределенные интегралы с помощью метода подстановки.

4.3. Вычислить неопределенные интегралы методом по частям.

4.4.Решить задачи физики и геометрии с помощью неопределенных интегралов.

#### **5.Таблица неопределенных интегралов**

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x  + C$	10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + C$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0)$	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm 1}  + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$	12. $\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left  \frac{x-1}{x+1} \right  + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	14. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\ctg x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2}  +$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tg x + C$	16. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left  \frac{x-a}{x+a} \right  + C$

#### **Свойства неопределенных интегралов**

$$1. \int (f(x) + g(x) - u(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int u(x)dx$$

$$2. \int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx, \text{ где } k - \text{const}$$

$$3. \left( \int f(x)dx \right)' = f(x)$$

$$4. \int df(x)dx = f(x) + c$$

### Приложения неопределенного интеграла

$$1. \int v(t)dt = S(t) + c, \quad S - \text{перемещение, } v - \text{скорость}$$

$$2. \int a(t)dt = v(t) + c, \quad v - \text{скорость, } a - \text{ускорение}$$

$$3. \int I(t)dt = q(t) + c, \quad q - \text{заряд, } I - \text{сила тока}$$

$$4. \int N(t)dt = A(t) + c, \quad A - \text{работа, } N - \text{мощность}$$

### 6. Технология выполнения работы

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int 2x(3x+4)^2 dx$ .

**Решение.** Раскроем квадрат суммы под знаком интеграла, раскроем скобки и применим табличное интегрирование (формулу 1, свойства 1,2).

$$\begin{aligned} \int 2x(3x+4)^2 dx &= \int 2x(9x^2+24x+16) dx = \int (18x^3+48x^2+32x) dx = \\ &= 18 \cdot \frac{x^4}{4} + 48 \cdot \frac{x^3}{3} + 32 \cdot \frac{x^2}{2} + c = 4,5x^4 + 16x^3 + 16x^2 + c \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл  $\int 3\cos(6x-8)dx$ .

**Решение.** Воспользуемся формулой 6 из таблицы интегралов и методом подстановки

$$\int 3\cos(6x-8)dx = \left\{ \begin{array}{l} 6x-8=t \\ 6dx=dt \\ dx=\frac{dt}{6} \end{array} \right\} = 3 \int \cos t \frac{dt}{6} = \frac{3}{6} \int \cos t dt = 0,5 \sin t + c = 0,5 \sin(6x-8) + c$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл  $\int (x-2)e^{2x} dx$

**Решение.**  $\int (x-2)e^{2x} dx = (*)$

Воспользуемся методом интегрирования по частям  $\int u dv = uv - \int v du$ .

$$u = x-2 \Rightarrow du = (x-2)' dx = dx$$

$$dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$(*) = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \frac{(x-2)e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C, \text{ где } C = const$$

**Пример 4.** Решить задачи:

а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $7x$ .

б) Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением  $v=3t^2-4t+7$ . Найдите закон движения точки, если в начальный момент движения  $S=1м$ .

**Решение.**

$$\text{а) } k=7x \quad y=\int kdx=\int 7xdx=7\cdot\frac{x^2}{2}+c \quad y=7\cdot\frac{x^2}{2}+c \Rightarrow y=3,5x^2+c$$

Т.к. кривая проходит через точку (0;0), то  $0=3,5\cdot 0^2+c \quad c=0$

Ответ:  $y=3,5x^2$ .

б) Воспользуемся формулой 1 приложения неопределенного интеграла

$$\int (3t^2 - 4t + 7)dt = 3\cdot\frac{t^3}{3} - 4\cdot\frac{t^2}{2} + 7t + c = t^3 - 2t^2 + 7t + c$$

Т.к. при  $t=0 \quad S=1$ , то  $0^3 - 2\cdot 0^2 + 7\cdot 0 + c = 1 \quad c=1$

Ответ:  $S(t)=t^3 - 2t^2 + 7t + 1$  (м)

### 7. Контрольные вопросы

7.1. Что называется неопределенным интегралом?

7.2. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?

7.3. Что называется интегрированием?

7.4. Как проверяется результат интегрирования?

### 8. Литература

8.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §§62-65.

8.2. А.А.Дадаян «Математика», §§10.1-10.5.

### Таблица вариантов 6

#### Вариант 1

1	2	3
а) $\int 5x(3x-1)^2 dx$	а) $\int 6\cos(3x+1)dx$	$\int (x+5)\cos x dx$
б) $\int (2^x + x^2 + 2\pi) dx$	б) $\int \frac{2dx}{\cos^2 3x}$	
в) $\int \sqrt[4]{x} dx$	в) $\int (5x-3)^5 dx$	
г) $\int \left(x^n - \frac{1}{x}\right) dx$	г) $\int \frac{12x^3 + 5}{3x^4 + 5x - 3} dx$	
	д) $\int x^5 \cdot e^{x^6} dx$	

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $3x$ .

б) Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением  $v=t^2-8t+2$ . Найдите закон движения точки.

#### Вариант 2

1	2	3
а) $\int 4x(2x+1)^2 dx$	а) $\int 4\sin(2x-1)dx$	$\int (x-2)\sin x dx$
б) $\int (4^x - x^4 + e) dx$	б) $\int (2x+4)^3 dx$	
в) $\int \sqrt[3]{x} dx$	в) $\int \frac{4dx}{1+3x^2}$	

г) $\int \left( 2x^m - \frac{1}{x^2} \right) dx$	г) $\int \frac{18x^2 - 3}{6x^3 - 3x + 8} dx$ д) $\int x^7 \cdot e^{x^8} dx$	
--	--	--

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $2-x$ .

б) Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением  $v=4t-3t^2$ . Найдите закон движения точки.

#### Вариант 3

1	2	3
а) $\int 6x^2(1+3x)^2 dx$ б) $\int \left( \left( \frac{1}{2} \right)^x + x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{2} \right) dx$ в) $\int \sqrt[5]{x} dx$ г) $\int \left( \frac{x}{2} - \frac{2}{x} \right) dx$	а) $\int 4e^{2x+1} dx$ б) $\int \frac{5dx}{\sin^2 10x}$ в) $\int (4-5x)^6 dx$ г) $\int \frac{15x^2 + 2}{5x^3 + 2x + 8} dx$ д) $\int x^3 \cdot e^{x^4} dx$	$\int (x+5)e^x dx$

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $\frac{x}{3}$ .

б) Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением  $v=6t^2 + 4t - 1$ . Найдите закон движения точки, если в начальный момент времени она находилась в начале координат.

#### Вариант 4

1	2	3
а) $\int 2x^3(x-3)^2 dx$ б) $\int (0,5^x - x^{0,5} + 0,5) dx$ в) $\int \sqrt[6]{x} dx$ г) $\int \frac{dx}{2 \cos^2 x}$	а) $\int 2 \sin(4x-5) dx$ б) $\int \frac{5dx}{1+8x^2}$ в) $\int (2+3x)^7 dx$ г) $\int \frac{6x^2 + 8}{2x^3 + 8x + 1} dx$ д) $\int x^2 \cdot e^{x^3} dx$	$\int (x-2)e^x dx$

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $x^2+1$ .

б) Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением  $v=t^2-4t+3$ . Найдите закон движения точки, если за время  $t=3c$  она пройдет путь  $s=20m$ .

#### Вариант 5

1	2	3
а) $\int 3x^2(x-1)^2 dx$ б) $\int 4 \cos(2x+3) dx$	$\int x e^x dx$	

$\int \left( \left( \frac{1}{3} \right)^x + x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \right) dx$ в) $\int \sqrt[7]{x} dx$ г) $\int \left( 5 - \frac{1}{x^5} \right) dx$	б) $\int (5-x)^{10} dx$ в) $\int \frac{2dx}{1+9x^2}$ г) $\int \frac{20x^3 - 6}{5x^4 - 6x + 8} dx$ д) $\int 4x^3 \cdot e^{x^4} dx$	
--	--	--

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $3-x^2$ .

б) Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением  $v=8t^3 + 3t^2 - 1$ . Найдите закон движения точки, если за время  $t=1$ с она пройдет путь  $s=5$ м.

#### Вариант 6

1	2	3
а) $\int 2x^5(x+1)^2 dx$ б) $\int (3^x - x^3 + 3e) dx$ в) $\int \sqrt[8]{x} dx$ г) $\int \left( \frac{x}{4} - \frac{1}{x^4} \right) dx$	а) $\int 6e^{3x-2} dx$ б) $\int \frac{3dx}{1+25x^2}$ в) $\int (4+6x)^8 dx$ г) $\int \frac{12x^3 - 6e}{3x^4 - 6ex + 8} dx$ д) $\int 3x^5 \cdot e^{x^6} dx$	$\int x \sin x dx$

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $2x-1$ .

б) Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением  $v=3t^2 - 4t - 4$ . Найдите закон движения точки, если за время  $t=2$ с она пройдет путь  $s=8$ м.

#### Вариант 7

1	2	3
а) $\int \left( 5 \cos x - 3x^2 + \frac{1}{x} \right) dx$ б) $\int \frac{3x^8 - x^5 + x^4}{x^5} dx$ в) $\int (6^x \cdot 3^{2x} - 4) dx$ г) $\int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$	а) $\int (8x-4)^3 dx$ б) $\int \frac{dx}{1+16x^2}$ в) $\int \frac{dx}{2 \cos^2 3x}$ г) $\int \frac{8x^3 + 6e}{2x^4 + 6ex - 18} dx$ д) $\int 14x^6 \cdot e^{x^7} dx$	$\int x \cos x dx$

4.а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $2x^3-1$ .

б) Ускорение точки изменяется по закону  $a(t)=4-10t$  (м/с<sup>2</sup>). Найти закон изменения скорости точки, если в начальный момент времени  $v=10$ м/с.

#### Вариант 8

1	2	3
---	---	---

а) $\int \left( 6 \sin x + 4x^3 - \frac{1}{x} \right) dx$	а) $\int (7x+5)^4 dx$	$\int x \ln x dx$
б) $\int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7} dx$	б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	
в) $\int (7^x \cdot 2^{2x} + 5) dx$	в) $\int \frac{2dx}{1+5x^2}$	
г) $\int \left( \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$	г) $\int \frac{20x^3 - 12x}{5x^4 - 6x^2 + 8} dx$	
	д) $\int 32x^7 \cdot e^{x^8} dx$	

4.а) а) Составьте уравнение кривой, проходящей через начало координат, если угловой коэффициент касательной в любой точке равен  $2x^3 + 1$ .

б) Ускорение точки изменяется по закону  $a(t) = 4 + 10t$  (м/с<sup>2</sup>). Найти закон изменения скорости точки, если в начальный момент времени  $v = 10$  м/с.

## Практическая работа №8

2 часа

### ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

#### 1. Цель работы

Закрепить вычисление определенных интегралов методом непосредственного интегрирования.

#### 2. Обеспечивающие средства

2.1. Методические указания по выполнению практической работы, таблицы интегралов, таблицы значений тригонометрических функций, микрокалькуляторы.

#### 3. Требования к отчету

3.1. Дата, номер работы, тема, цель работы.

3.2. Используя метод непосредственного интегрирования, вычислить определенные интегралы в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 7).

3.3. Решить задачу с помощью определенного интеграла.

3.4. Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

#### 4. Технология вычисления определенного интеграла

**Определённым интегралом** от непрерывной функции  $f(x)$  на конечном отрезке  $[a, b]$  (где  $a \neq b$ ) называется приращение какой-нибудь её первообразной на этом отрезке. При этом употребляется запись

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (8.1)$$

Числа  $a$  и  $b$  называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, а отрезок  $[a, b]$  – отрезком интегрирования. Равенство (22.1) называется формулой Ньютона-Лейбница. Разность  $F(b) - F(a)$  кратко записывают так:

$$F(x) \Big|_a^b.$$

Поэтому формулу Ньютона-Лейбница имеет и иную запись:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (8.2)$$

#### Свойства определённого интеграла

**Теорема 1.** *Определённый интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю, т.е.*

$$\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0. \quad (8.3)$$

**Теорема 2.** Величина определённого интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt. \quad (8.4)$$

Пусть  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$ . Для  $f(t)$  первообразной служит та же функция  $F(t)$ , в которой лишь иначе обозначена независимая переменная. Следовательно,

$$F(x) \Big|_a^b = F(t) \Big|_a^b.$$

**Теорема 3.** Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx. \quad (8.5)$$

**Теорема 4.** Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определённых интегралов от этих функций, т.е.

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx - \int_a^b \psi(x) dx. \quad (8.6)$$

**Теорема 5.** Если отрезок интегрирования разбит на части, то определённый интеграл по всему отрезку равен сумме определённых интегралов по его частям, т.е. если  $c \in [a, b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (8.7)$$

**Теорема 6.** При перестановке пределов интегрирования абсолютная величина определённого интеграла не меняется, а изменяется лишь его знак, т.е.

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (8.8)$$

Свойства определённого интеграла позволяют упрощать непосредственное вычисление интегралов.

**ПРИМЕР 1.** Вычислить

$$\int_1^2 e^{2x} dx.$$

**РЕШЕНИЕ.** По формуле  $\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$ , получим

$$\int_1^2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} (e^4 - e^2) = \frac{1}{2} e^2 (e^2 - 1).$$

**ПРИМЕР 2.** Вычислить

$$\int_1^2 \left( \frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx.$$

**РЕШЕНИЕ.** Используя теоремы 4, 3 и табличные интегралы, получим

$$\int_1^2 \left( \frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x} \right) dx = 4 \int_1^2 \frac{dx}{x} - 5 \int_1^2 x^4 dx + 2 \int_1^2 \sqrt{x} dx =$$

$$= 4 \ln |x| \Big|_1^2 - 5 \frac{x^5}{5} \Big|_1^2 + 2 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) +$$

$$+ \frac{4}{3} (2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}) = 4 \ln 2 + \frac{8}{3} \sqrt{2} - 32 \frac{1}{3}.$$

### 5. Практическое задание

Таблица вариантов 7

Вариант 1				Вариант 2			
№ 1. Вычислите значение определенного интеграла							
1	$\int_1^3 x^2 dx$	6	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin x + \cos x) dx$	1	$\int_0^2 x^4 dx$	6	$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x) dx$
2	$\int_{-2}^3 (4x^3 + 2x - 1) dx$	7	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2 x}$	2	$\int_{-2}^3 (-3x^2 + 2x + 1) dx$	7	$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{6dx}{\cos^2 x}$
3	$\int_0^4 \sqrt{x} dx$	8	$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	3	$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2} dx$	8	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$
4	$\int_0^1 e^{2x} dx$	9	$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (\cos 2x) dx$	4	$\int_1^3 e^{2x} dx$	9	$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \sin \frac{x}{2} \right) dx$
5	$\int_3^6 \frac{dx}{x+1}$	10	$\int_1^2 \frac{(x-1)^2}{x^2} dx$	5	$\int_2^5 \frac{dx}{x+2}$	10	$\int_2^3 (2x-1)^3 dx$
№ 2. Решите задачу							
Скорость движения точки $v=(6t^2+4)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5с от начала движения.				Скорость движения точки $v=(18t-3t^2)$ м/с. Найдите её путь за вторую секунду.			

### 6. Контрольные вопросы

- 6.1. Что называется определенным интегралом?
- 6.2. Какие свойства определенного интеграла вы знаете?
- 6.3. Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
- 6.4. Каково физическое приложение определенных интегралов?

### 7. Литература

- 7.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §§66-67.
- 7.2. А.А.Дадаян «Математика», §§10.9-10.10.

## Практическая работа №9

2 часа

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

### 1. Цель работы

Закрепить умения вычислять определённые интегралы разными методами, применять определённые интегралы при решении задач физики и геометрии.



## **2. Обеспечивающие средства**

2.1. Методические указания по выполнению практической работы, таблицы интегралов, микрокалькуляторы.

## **3. Требования к отчету**

3.1. Дата, номер работы, тема.

3.2. Выполнить практическое задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицу вариантов 8).

3.3. Подготовить ответы на вопросы (в письменной форме).

## **4. Практическое задание**

4.1. Вычислить определенные интегралы методом непосредственного интегрирования и подстановки.

4.2. Решить задачу физики с помощью определенного интеграла.

4.3. Решить задачи 3,4 - задачи геометрии с помощью определенного интеграла. Сделать чертёж.

## **5. Технология вычисления определенного интеграла**

На практике очень часто приходится решать следующие задачи:

1) найти путь точки, движущейся прямолинейно, по заданному закону изменения скорости этой точки;

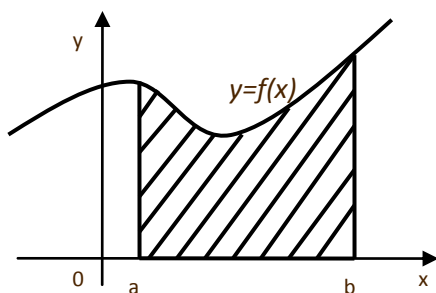
2) вычислить площадь фигур, которые имеют форму криволинейной трапеции;

3) вычислить объем тел, полученных вращением вокруг оси какой-либо криволинейной трапеции.

При прямолинейном движении путь точки, пройденный с момента времени  $t_1$  до момента времени  $t_2$ , можно определить по закону изменения скорости этой точки:

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt \quad (9.1)$$

**Криволинейная трапеция** - это фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке  $[a; b]$  функции, прямыми  $x=a$ ,  $x=b$  и отрезком  $[a; b]$ .



Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$S_{\phi} = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (9.2)$$

Объем тела вращения можно вычислить по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (9.3)$$

### 6. Технология выполнения работы

**Пример 1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = -x^2 + 5x + 6$  и осью  $OX$ .

**Решение.** Найдем точки пересечения параболы с осью  $OX$ :

$$-x^2 + 5x + 6 = 0$$

Имеем корни квадратного уравнения:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 6$ .

Построим график функции  $y = -x^2 + 5x + 6$ .

Пределы интегрирования:  $-1$  и  $6$ .

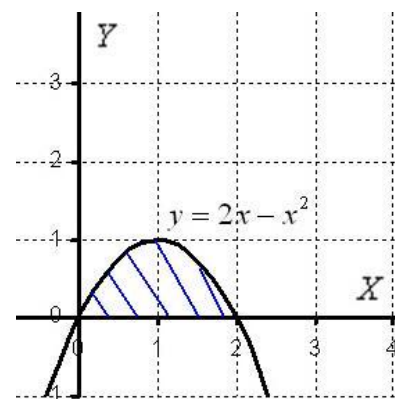
По формуле (9.2) найдем площадь фигуры, ограниченной сверху параболой и снизу осью  $OX$ :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^6 (-x^2 + 5x + 6) dx &= -\int_{-1}^6 x^2 dx + 5 \int_{-1}^6 x dx + 6 \int_{-1}^6 dx = \left( -\frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 6x \right)_{-1}^6 = \\ &= \left( -\frac{6^3}{3} + 5 \cdot \frac{6^2}{2} + 6 \cdot 6 \right) - \left( -\frac{(-1)^3}{3} + 5 \cdot \frac{(-1)^2}{2} + 6 \cdot (-1) \right) = -72 + 90 + 36 - \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 6 = \\ &= 60 - \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = 60 - \frac{17}{6} = 60 - 2\frac{5}{6} = 57\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Ответ:  $S_{\phi} = 57\frac{1}{6}$  (кв.ед.)

**Пример 2.** Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$  вокруг оси  $OX$ .

**Решение.** Построим фигуру, ограниченную линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ , здесь уравнение  $y = 0$  задаёт ось  $OX$ . Плоская заштрихованная фигура вращается вокруг оси  $X$ . В результате вращения получается



«яйцевидное» тело, которое симметрично относительно оси  $OX$ . В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси  $OX$ . Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат:  $f^2(x)$ , таким образом, **объем тела вращения всегда неотрицателен**. Вычислим объем тела вращения, используя формулу (9.3):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \\ &= \pi \cdot \left( \frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \cdot \left( \frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} - 0 \right) = \frac{16\pi}{15} \end{aligned}$$

$$V = \frac{16\pi}{15} \varrho \varrho^3 \approx 3,35 \varrho \varrho^3.$$

Ответ:

### 7. Контрольные вопросы

- 7.1. Каково физическое и геометрическое приложение определенных интегралов?
- 7.2. Какая трапеция называется криволинейной? (определение вместе с рисунком).
- 7.3. По какой формуле вычисляется объем тела?

### 8. Литература

- 8.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §§66-67.
- 8.2. А.А.Дадаян «Математика», §§10.9-10.10.

### Таблица вариантов 8

#### Вариант 1

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^3 (x^4 + 4^x) dx; \quad \text{б) } \int_4^5 \frac{2dt}{t+1}; \quad \text{в) } \int_0^{10} (5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}) dx; \quad \text{г) } \int_2^3 (2x-1)^3 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2t-1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 9$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 2

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 (x^5 + 5^x) dx; \quad \text{б) } \int_3^5 \frac{3dt}{t-1}; \quad \text{в) } \int_0^7 (e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x}) dx; \quad \text{г) } \int_2^3 (2x+1)^3 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t+2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 8x - x^2 - 7$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 + x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 3

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 (x^9 + 9^x) dx; \quad \text{б) } \int_4^6 \frac{2dt}{t-1}; \quad \text{в) } \int_1^3 (\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 (3x-1)^4 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2-3t)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 3x - 4$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 4

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 (x^6 + 6^x) dx; \quad \text{б) } \int_2^6 \frac{5dt}{t+4}; \quad \text{в) } \int_0^2 (2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 (3x-1)^3 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t-1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 5x - x^2 + 6, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x, x = 0, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 5

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^2 (x^8 + 8^x) dx; \quad \text{б) } \int_3^6 \frac{4dt}{t-1}; \quad \text{в) } \int_1^4 (2 + \sqrt{x^3} - x) dx; \quad \text{г) } \int_2^3 (2x-1)^4 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2t+1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 3с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 6x + 8, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x, x = 5, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 6

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 (x^{10} + 10^x) dx; \quad \text{б) } \int_2^8 \frac{dt}{t+10}; \quad \text{в) } \int_0^1 (x + 2\sqrt[3]{x}) dx; \quad \text{г) } \int_2^3 (2x+1)^4 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t-2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 4x - 5, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x + 1, x = 0, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 7

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^4 (3x^2 + 2^x) dx; \quad \text{б) } \int_4^8 \frac{2dt}{t-3}; \quad \text{в) } \int_1^2 (2\sqrt{e} + \sqrt[5]{x}) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 (3x+2)^4 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t-3)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 2$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 3x, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 8

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^3 \left( \frac{x^3}{2} + 3^x \right) dx; \quad \text{б) } \int_6^7 \frac{\sqrt{2} dx}{x-5}; \quad \text{в) } \int_0^1 (e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}) dx; \quad \text{г) } \int_0^1 (3x-2)^5 dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = t(t-2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x + y - 4 = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 9

1. Вычислите определенные интегралы:  
а)  $\int_0^2 (4x^2 + x - 3) dx$ ; б)  $\int_3^6 \frac{dx}{x+1}$ ; в)  $\int_0^1 e^{4x} dx$ ; г)  $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$ .
2. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 3t^2 + 2t + 1$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за 10с от начала движения.
3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $x = 2$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 10

1. Вычислите определенные интегралы:  
а)  $\int_0^3 (2x^2 - x + 4) dx$ ; б)  $\int_2^5 \frac{dx}{x+2}$ ; в)  $\int_1^3 e^{4x} dx$ ; г)  $\int_0^1 (3x+1)^4 dx$ .
2. Скорость движения точки изменяется по закону  $v = 9t^2 - 8t$  (м/с). Найти путь  $S$ , пройденный точкой за четвертую секунду.
3. Вычислите, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями:  $y = -x^2 + 1$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 11

1. Вычислите определенные интегралы:  
а)  $\int_2^4 x^3 dx$ ; б)  $\int_2^4 3^x dx$ ; в)  $\int_1^8 \frac{3dx}{x+4}$ ; г)  $\int_1^3 (e + \sqrt[3]{x} - 2x) dx$ .
2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t + 3)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 12

1. Вычислите определенные интегралы:  
а)  $\int_1^3 x^4 dx$ ; б)  $\int_1^3 4^x dx$ ; в)  $\int_4^5 \frac{2dt}{t+1}$ ; г)  $\int_0^{10} (5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}) dx$ .
2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2t - 1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 5x - 6$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 9$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 13

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_0^2 x^5 dx$ ; б)  $\int_0^2 5^x dx$ ; в)  $\int_3^5 \frac{3dt}{t-1}$ ; г)  $\int_0^7 (e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x}) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t + 2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 8x - x^2 - 7$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 + x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 14

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_0^2 x^9 dx$ ; б)  $\int_0^2 9^x dx$ ; в)  $\int_4^6 \frac{2dt}{t-1}$ ; г)  $\int_1^3 (\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2 - 3t)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 3x - 4$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 15

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_1^2 x^6 dx$ ; б)  $\int_1^2 6^x dx$ ; в)  $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$ ; г)  $\int_0^2 (2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t - 1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 5x - x^2 + 6$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 16

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_0^8 \frac{x^3}{2} dx$ ; б)  $\int_0^3 3^x dx$ ; в)  $\int_6^7 \frac{\sqrt{2} dx}{x-5}$ ; г)  $\int_0^1 (e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = t(t - 2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x + y - 4 = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 17

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^1 x^{10} dx; \quad \text{б) } \int_0^1 10^x dx; \quad \text{в) } \int_2^8 \frac{dt}{t+10}; \quad \text{г) } \int_0^1 (x + 2\sqrt[3]{x}) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t - 2)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 4x - 5, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x + 1, x = 0, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 18

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_2^3 x^4 dx; \quad \text{б) } \int_2^3 4^x dx; \quad \text{в) } \int_6^8 \frac{dx}{x-5}; \quad \text{г) } \int_0^1 (\sqrt{x} - e^{3x} + 1) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t - 1)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой за первую секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 6x - 3x^2, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x - 1, x = 3, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 19

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^3 x^3 dx; \quad \text{б) } \int_1^3 3^x dx; \quad \text{в) } \int_2^5 \frac{4dt}{t+1}; \quad \text{г) } \int_1^4 (e^{5x} - \sqrt{x} - \pi) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (1 + 4t)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2, y = x + 2$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x, x = 3, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 20

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^4 3x^2 dx; \quad \text{б) } \int_1^4 2^x dx; \quad \text{в) } \int_4^8 \frac{2dt}{t-3}; \quad \text{г) } \int_1^2 (2\sqrt{e} + \sqrt[5]{x}) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t - 3)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 + 1, y = 0, x = 0, x = 2$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 3x, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 21

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_2^4 x^3 dx; \quad \text{б) } \int_2^4 3^x dx; \quad \text{в) } \int_1^8 \frac{3dx}{x+4}; \quad \text{г) } \int_1^3 (e + \sqrt[3]{x} - 2x) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t + 3)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 9 - x^2, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x, x = 3, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 22

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_1^3 x^4 dx; \quad \text{б) } \int_1^3 4^x dx; \quad \text{в) } \int_4^5 \frac{2dt}{t+1}; \quad \text{г) } \int_0^{10} (5x + 3e^x - \sqrt[5]{x^2}) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2t - 1)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 5x - 6, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{x}, y = 0, x = 9$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 23

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 x^5 dx; \quad \text{б) } \int_0^2 5^x dx; \quad \text{в) } \int_3^5 \frac{3dt}{t-1}; \quad \text{г) } \int_0^7 (e^{-2x} + 4x + \sqrt[3]{x}) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t + 2)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 8x - x^2 - 7, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 + x, x = 1, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 24

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^2 x^9 dx; \quad \text{б) } \int_0^2 9^x dx; \quad \text{в) } \int_4^6 \frac{2dt}{t-1}; \quad \text{г) } \int_1^3 (\sqrt[4]{x} - 2e^x + 3) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2 - 3t)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 3x - 4, y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2x, x = 1, x = 4, y = 0$ . Сделайте чертеж.

#### Вариант 25

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\text{а) } \int_0^8 \frac{x^3}{2} dx; \quad \text{б) } \int_0^3 3^x dx; \quad \text{в) } \int_6^7 \frac{\sqrt{2} dx}{x-5}; \quad \text{г) } \int_0^1 (e^{3x} + 2\pi - \sqrt[3]{x^2}) dx.$$

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = t(t - 2)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{3}{x}, x + y - 4 = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2, x = 2, y = 0$ . Сделайте чертеж.



### Вариант 26

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_1^2 x^6 dx$ ; б)  $\int_1^2 6^x dx$ ; в)  $\int_2^6 \frac{5dt}{t+4}$ ; г)  $\int_0^2 (2x + \sqrt[4]{x^3} - e^{-x}) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t - 1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 2-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 5x - x^2 + 6$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 2 - x$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

### Вариант 27

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_1^2 x^8 dx$ ; б)  $\int_1^2 8^x dx$ ; в)  $\int_3^6 \frac{4dt}{t-1}$ ; г)  $\int_1^4 (2 + \sqrt{x^3} - x) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (2t + 1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 3с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 6x + 8$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x$ ,  $x = 5$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

### Вариант 28

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_0^1 x^{10} dx$ ; б)  $\int_0^1 10^x dx$ ; в)  $\int_2^8 \frac{dt}{t+10}$ ; г)  $\int_0^1 (x + 2\sqrt[3]{x}) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (3t - 2)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 4x - 5$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

### Вариант 29

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_2^3 x^4 dx$ ; б)  $\int_2^3 4^x dx$ ; в)  $\int_6^8 \frac{dx}{x-5}$ ; г)  $\int_0^1 (\sqrt{x} - e^{3x} + 1) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (4t - 1)^2$  м/с. Найдите путь, пройденный точкой за первую секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 6x - 3x^2$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = x - 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ . Сделайте чертеж.

### Вариант 30

1. Вычислите определенные интегралы:

а)  $\int_1^3 x^3 dx$ ; б)  $\int_1^3 3^x dx$ ; в)  $\int_2^5 \frac{4dt}{t+1}$ ; г)  $\int_1^4 (e^{5x} - \sqrt{x} - \pi) dx$ .

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону  $v = (1 + 4t)^2 \text{ м/с}$ . Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 2с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2, y = x + 2$ . Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x, x = 3, y = 0$ . Сделайте чертеж.

## Практическая работа №10

2 часа

### **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОФИЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЭЛЕМЕНТОВ КОМБИНАТОРИКИ И ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДОВ**

#### **1. Цель работы**

Формировать умение: находить число перестановок, сочетаний, размещений при решении практических задач; применять понятие вероятности при решении задач.

#### **2. Обеспечивающие средства**

2.1. Методические указания по выполнению практической работы.

#### **3. Требования к отчету**

3.1. Дата, номер работы, тема.

3.2. Выполнить практическое задание в соответствии с данными своего варианта (см. таблицы вариантов 9, 10).

3.3. Подготовить ответы на контрольные вопросы (в устной форме).

#### **4. Технология решения задач комбинаторики**

При решении практических задач часто нужно из некоторой совокупности предметов (некоторого множества) тем или иным способом выбирать элементы из этого множества, обладающие определёнными свойствами, располагать их в определённом порядке или выполнять над предметами некоторые действия, связанные с подсчётом количества вариантов. Такие задачи называют комбинаторными задачами, а раздел математики, где занимаются решением таких задач, называют комбинаторикой.

Различают 3 основных вида соединений объектов: размещения (порядок следования объектов важен), перестановки, сочетания (порядок следования объектов не важен).

Число размещений без повторений из  $n$  элементов по  $m$  ( $m \leq n$ ):

$$A_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \quad (10.1)$$

Число размещений с повторениями из  $n$  элементов по  $m$ :

$$\overline{A}_n^m = n^m \quad (10.2)$$

Если  $m = n$ , то число размещений без повторений равно  $n!$ . Такие размещения называют перестановками:

$$P_n = n! \quad (10.3)$$

Число перестановок с повторениями:

$$P_n\{k_1, k_2, \dots, k_m\} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (10.4)$$

Число сочетаний без повторений из  $n$  элементов по  $m$  ( $n \geq m$ ):

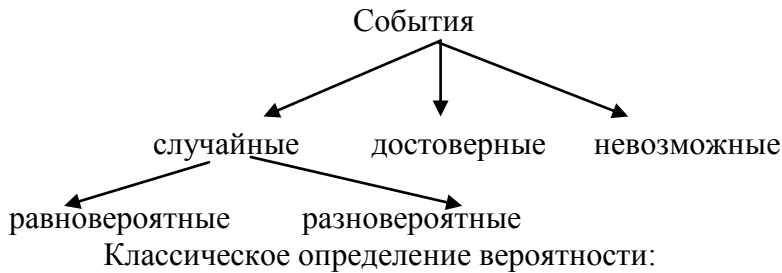
$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (10.5)$$

Число сочетаний с повторениями из  $n$  элементов по  $m$ :

<sup>3</sup> Произведение  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$ , где  $n$  — натуральное число, большее 1, называется  $n$ -факториалом. Дополнительно полагают:  $1! = 0! = 1$ .

$$\overline{C}_n^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} \quad (10.6)$$

**Теория вероятностей** - это раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.



$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad (10.7)$$

где  $P(A)$  – вероятность события,  $n$  – общее число возможных исходов события,  $m$  – число исходов, благоприятствующих появлению данного события.

Вероятность события  $A$ , вычисленная при условии, что событие  $B$  произошло, называется условной вероятностью события  $A$  относительно события  $B$ . Обозначается  $P(A/B)$ .

События  $A$  и  $B$  называют **независимыми**, если наступление одного из них не влияет на вероятность наступления другого. События  $A$  и  $B$  называют **зависимыми**, если наступление одного из них изменяет вероятность наступления другого.

**Достоверное событие** – это событие, которое происходит при каждом проведении рассматриваемого эксперимента. Например, при бросании игрального кубика событие «при бросании кубика выпало не более шести очков» является достоверным.

**Невозможное событие** – это событие, которое никогда не может произойти при проведении данного эксперимента. Например, при бросании монеты событие «при бросании монеты выпали орел и решка» является невозможным.

**Противоположное событие** (по отношению к рассматриваемому событию  $A$ ) – это событие  $A^1$ , которое не происходит, если  $A$  происходит. Например, событие  $A$  – «выпало четное число очков» и  $A^1$  – «выпало нечетное число очков» при бросании игрального кубика – противоположные.

Два события  $A$  и  $B$  называют **совместными**, если они могут произойти одновременно, при одном исходе эксперимента, и **несовместными**, если они не могут произойти одновременно ни при одном исходе эксперимента.

**Суммой двух случайных событий  $A$  и  $B$**  называют новое случайное событие  $A+B$ , которое происходит, если происходят либо  $A$ , либо  $B$ , либо  $A$  и  $B$  одновременно.

**Произведением двух случайных событий  $A$  и  $B$**  называется новое случайное событие  $A \cdot B$ , которое происходит только тогда, когда происходят события  $A$  и  $B$  одновременно.

**Теорема сложения.** Вероятность суммы двух несовместных случайных событий  $A$  и  $B$  равна сумме их вероятностей:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \quad (10.8)$$

Если  $A$  и  $B$  совместны, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) \quad (10.9)$$

**Теорема умножения.** Вероятность произведения двух независимых случайных событий  $A$  и  $B$  равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B) \quad (10.10)$$

Если  $A$  и  $B$  зависимы, то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B), \quad (10.11)$$

где  $P(A/B)$ ,  $P(B/A)$  – условные вероятности одного события относительно второго.

**Запомни:**  
**Сумма – учитываем Совместность.**  
**Произведение – учитываем Зависимость.**

Пусть событие  $A$  может произойти с одним из событий  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , образующих полную группу несовместных событий, называемых гипотезами. Тогда справедлива формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + \dots + P(H_n)P(A/H_n) \quad (10.12)$$

Вероятности  $P(H_i)$ ,  $(i = 1, 2, \dots, n)$  называют априорными вероятностями гипотез.

Пусть выполняются условия теоремы о полной вероятности  $P(A)$  наступления события  $A$ . Тогда, по формуле Байеса, апостериорная вероятность  $P(H_i/A)$   $i$ -й гипотезы при условии, что событие  $A$  произошло, равна

$$P(H_i/A) = \frac{P(A/H_i)P(H_i)}{P(A)} \quad (10.13)$$

Условия повторных испытаний по схеме Бернулли:

1) опыты независимы, т.е. результат каждого опыта не оказывает влияния на другие опыты;

2) вероятность  $P(A) = p$  наступления события  $A$  в каждом опыте одна и та же.

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad (10.14)$$

где  $P_n(m)$  - вероятность того, что в  $n$  испытаниях по схеме Бернулли событие  $A$  наступит ровно  $m$  раз,  $q = 1-p$ .

**ПРИМЕР 1.** Вычислить  $\frac{6!}{5!} + C_6^4$ .

**РЕШЕНИЕ.**  $\frac{6!}{5!} + C_6^4 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{6!}{4!(6-4)!} = 6 + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 6 + 15 = 21$

**ПРИМЕР 2.** Сколькими способами можно раскрасить 3 объекта, используя красный и желтый цвета?

**РЕШЕНИЕ.** По формуле (10.2)  $2^3 = 8$ .

**ПРИМЕР 3.** Сколько 9-значных чисел можно получить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

**РЕШЕНИЕ.** По формуле (10.3)  $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 362880$  чисел с различными цифрами.

**ПРИМЕР 4.** Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове БАРАБАН.

$$\frac{7!}{2!3!1!1!} = 60$$

**РЕШЕНИЕ.** По формуле (10.4)

**ПРИМЕР 6.** На складе имеется 350 комплектов спецодежды для рабочих, 50 из которых серого цвета, а остальные – черного. Какова вероятность того, что кладовщик выдаст рабочему комплект спецодежды черного цвета?

**РЕШЕНИЕ.**  $n = 350$ ,  $m = 300$ , т.к. на складе имеется 300 комплектов черного цвета.

По формуле (10.7):  $P(A) = \frac{300}{350} = \frac{6}{7} \approx 0,86 = 86\%$ .

**ПРИМЕР 6.** На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено I бригадой, 15 - II и 10 - III. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная II или III бригадой.

**РЕШЕНИЕ.** Поступления детали, изготовленной разными бригадами, события несовместны.



По формуле (10.8):  $P(B+C) = \frac{15}{50} + \frac{10}{50} = \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} = 50\%$ .

**ПРИМЕР 7.** На предприятии 96% изделий признаются пригодными к использованию. Из каждой сотни пригодных изделий в среднем 75 являются изделиями I сорта. Найти вероятность того, что наугад взятое изделие окажется I сорта.

**РЕШЕНИЕ.** А-изделие признается годным, В-изделие I сорта.  $P(A)=0,96$ ;  $P(B|A)=0,75$ .

По формуле (10.11):  $P(AB)=0,96 \cdot 0,75=0,72=72\%$ .

**ПРИМЕР 8.** Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для данного стрелка равна 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

**РЕШЕНИЕ.**  $n=5$ ;  $m=2$ ;  $p=0,7$ ;  $q=1-0,7=0,3$ . По формуле Бернулли (10.14) имеем:

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 0,7^2 \cdot 0,3^3 = 10 \cdot 0,49 \cdot 0,027 = 0,1323 = 13,23\%.$$

### 5. Практическое задание

#### Таблица вариантов 9

<p style="text-align: center;"><b>Вариант 1</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_6^3</math>; <math>A_7^3</math>; <math>P_6</math>.</li> <li>2. Сколько двузначных чисел без повторений можно составить из цифр 1,3,5,9 ?</li> <li>3. Из 6 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?</li> <li>4. Сколькими способами можно расставить 5 книг на полке?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове МАТЕМАТИКА.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 2</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>P_7</math>; <math>C_7^3</math>; <math>A_6^3</math>.</li> <li>2. Сколько двузначных чисел без повторений можно составить из цифр 1,3,5,7,9 ?</li> <li>3. Из 7 открыток надо выбрать 3. Сколькими способами это можно сделать?</li> <li>4. Сколькими способами можно расставить 8 человек в ряд?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове КОМБИНАТОРИКА.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 3</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>P_4</math>; <math>A_8^3</math>; <math>C_7^2</math>.</li> <li>2. Сколько двузначных чисел без повторений можно составить из цифр 2,4,6,8 ?</li> <li>3. Из 10 человек надо выбрать команду из 4 человек. Сколькими способами это можно сделать?</li> <li>4. Сколькими способами можно расставить 6 книг на полке?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ОСНОВАНИЕ.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 4</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>P_5</math>; <math>C_8^3</math>; <math>A_6^2</math>.</li> <li>2. Сколькими способами можно составить флаг, состоящий из трех горизонтальных полос различного цвета, если можно использовать материал семи различных цветов?</li> <li>3. Из 10 человек надо выбрать команду из 4 человек. Сколькими способами это можно сделать?</li> <li>4. Сколькими способами можно составить список из 7 человек?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ПРАКТИКА.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 5</b></p>

<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_5^3; P_3; A_6^4</math>.</li> <li>2. Сколько трёхзначных чисел без повторений можно составить из цифр 1,3,5,7?</li> <li>3. Сколькими способами можно составить расписание занятий из 8 учебных дисциплин?</li> <li>4. Из 10 кандидатов нужно выбрать 3 человека на конференцию. Сколькими различными способами это можно сделать?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове МИНИМУМ.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 6</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_6^4; P_9; A_8^4</math>.</li> <li>2. Сколькими способами можно составить порядок выступления 7 докладчиков конференции?</li> <li>3. Из 8 нужно выбрать 4 подарочные книги. Сколькими различными способами это можно сделать?</li> <li>4. Сколько трёхзначных чисел без повторений можно составить из цифр 1,3,5,7,9?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ПАРАБОЛА.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 7</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_7^4; A_8^2; P_5</math>.</li> <li>2. Сколькими способами можно составить порядок ответов 6 студентов на экзамене?</li> <li>3. Из 10 блюд, предложенных в меню, клиент выбирает 3 из них. Сколько дней он может заказывать разнообразный обед?</li> <li>4. Сколькими способами группа из 15 человек может из своего состава выбрать старосту и его заместителя?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ПЛОСКОСТЬ.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 8</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_7^2; P_{10}; A_9^4</math>.</li> <li>2. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь друг за другом?</li> <li>3. В конкурсе переводчиков участвуют 20 человек. Сколько может быть вариантов распределения пяти призовых мест в этом конкурсе?</li> <li>4. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов при наличии 10 различных цветов?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ПЕРИМЕТР.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 9</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_7^2; P_{10}; A_9^4</math>.</li> <li>2. Сколько шестизначных телефонных номеров без повторений можно составить из всех цифр?</li> <li>3. Сколькими способами можно распределить 10 различных писем по 10 различным конвертам?</li> <li>4. В спортивном зале студент может выбрать три дня посещения спортивной секции в течение недели. Сколько способов графика тренировки есть у студента?</li> <li>5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове ПРОПОРЦИЯ.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 10</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Вычислить: <math>C_7^5; P_4; A_9^5</math>.</li> <li>2. Сколько четырёхзначных чисел без повторений можно составить из цифр 0,2,4,6,8?</li> <li>3. Сколькими способами можно составить расписание занятий из 6 учебных дисциплин?</li> </ol>

4. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «выборка»?
5. Подсчитать все возможные слова, которые могут быть получены перестановкой букв в слове АСИМПТОТА.

**Таблица вариантов 10**

<p style="text-align: center;"><b>Вариант 1</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. На 1000 автомобилей, выпущенных в 2007-2008гг, 350 имеют дефект в электрической системе. Какова вероятность купить исправную машину?</li> <li>2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 40 до 70 является кратным 6?</li> <li>3. Какова вероятность того, что при 5 бросаниях монеты она 3 раза упадет гербом вверх?</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 2</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. На каждые 1000 электрических лампочек приходится 5 бракованных. Какова вероятность купить исправную лампочку?</li> <li>2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число от 1 до 30 (включительно) является делителем числа 30?</li> <li>3. Для данного баскетболиста вероятность попадания в кольцо при каждом броске составляет 0,4. Чего вероятнее ожидать – попадания 3 мячей при 4 бросках или попадания 4 мячей при 5 бросках, если броски считаются независимыми?</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 3</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Среди 170 деталей, изготовленных на станке, оказалось 8 деталей, не отвечающих стандарту. Найдите вероятность выбора детали, не отвечающей стандарту.</li> <li>2. Из 5 букв компьютерной программой составлено слово КНИГА. Какова вероятность того, что при очередном запуске программа из тех же букв вновь составит это слово?</li> <li>3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо 3, либо 5, либо тому и другому одновременно.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 4</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Контролер, проверяя качество 500 изделий, установил, что 10 из них относится ко второму сорту, а остальные – к первому. Найдите вероятность выбора изделия первого сорта.</li> <li>2. Лотерейные билеты пронумерованы целыми числами от 1 до 200 (включительно). Какова вероятность того, что номер купленного билета кратен 7 или 5?</li> <li>3. Вероятность попадания в кольцо данного баскетболиста составляет 0,6. Баскетболист выполнил серию из 4 бросков. Какова вероятность того, что при этом было ровно 3 попадания?</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 5</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. На каждые 500 мониторов, поступивших в продажу, приходится 15 неработающих. Какова вероятность того, что случайно выбранный монитор работает?</li> <li>2. В урне 8 черных, 6 красных, 4 белых шара. Последовательно вынимается 3 шара. Найти вероятность того, что первый шар окажется черным, второй – красным, третий – белым.</li> <li>3. В ящике находятся детали, из которых 12 изготовлены на первом станке, 20-на втором и 16-на третьем. Вероятности того, что детали стандартные, соответственно равны 0,9; 0,8; 0,6. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется стандартной.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b>Вариант 6</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. На каждые 600 клавиатур для компьютера приходится 12 неисправных. Какова вероятность того, что случайно выбранная клавиатура исправна?</li> <li>2. Имеются 3 урны с шарами. В первой находится 6 белых и 4 черных шара, во второй - 5 белых и 5 черных, а в третьей – 6 белых шаров. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым?</li> <li>3. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным либо</li> </ol>

4, либо 5, либо тому и другому одновременно.
<p align="center"><b>Вариант 7</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Из коллектива, в котором работают 10 мужчин и 15 женщин, выбирают представителя на конференцию. Какова вероятность того, что это будет женщина?</li> <li>2. В коробке находятся 20 белых и 15 черных кубиков. Наудачу вынимают 1 кубик, который оказался белым, и откладывают его в сторону. После этого берут еще один кубик. Найдите вероятность того, что этот кубик тоже окажется белым.</li> <li>3. В ящике сложены 16 деталей, изготовленных на первом участке, 24-на втором и 20-на третьем. Вероятности того, что детали имеют отличное качество, соответственно равны 0,8; 0,6; 0,8. Найти вероятность того, что взятая наугад деталь окажется отличного качества.</li> </ol>
<p align="center"><b>Вариант 8</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. В ящике с деталями оказалось 300 деталей первого сорта, 200 деталей второго и 50 деталей третьего сорта. Наудачу вынимают одну из деталей. Чему равна вероятность вынуть деталь второго сорта?</li> <li>2. В урне находятся 7 белых и 5 зеленых шаров. Какова вероятность того, что два наудачу вынутых шара окажутся зелеными?</li> <li>3. Детали проходит две операции обработки. Вероятность получения брака при первой операции равна 0,02, при второй-0,03. Найти вероятность получения детали без брака после двух операции, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.</li> </ol>
<p align="center"><b>Вариант 9</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Из 32 студентов группы 10 человек учат иностранный язык немецкий. 8 человек – французский, 6 – испанский, 4 – итальянский, а остальные – китайский. Какова вероятность того, что в аудиторию первым войдет студент, изучающий китайский язык?</li> <li>2. В урне находятся 10 белых и 8 черных шаров. Найдите вероятность того, что три шара, наугад вынутые один за другим, окажутся черными.</li> <li>3. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго 35%, с третьего – 25% деталей. Среди деталей, изготовленных на первом автомате 0,2% бракованных, на втором -0,3%, на третьем – 0,5%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь- бракованная.</li> </ol>
<p align="center"><b>Вариант 10</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Для занятий гимнастикой в спортзале приготовлено 6 скакалок, 8 мячей, 7 гимнастических палок и пары гантелей по 0,5 кг. Какова вероятность того, что первый вошедший в зал студент возьмет гимнастическую палку?</li> <li>2. В коробке находятся 10 кубиков, 8 из которых белых. Найдите вероятность того, что два кубика, наугад вынутые один за другим, окажутся белыми.</li> <li>3. Рабочий обслуживает три автомата, работающих независимо друг от друга. Вероятность того, что в течение часа первый автомат не потребует внимания рабочего, равна 0,8, для второго – 0,7, для третьего – 0,9. Найдите вероятность того, что в течение часа ни один из автоматов не потребует внимания рабочего.</li> </ol>

### **6. Контрольные вопросы**

- 6.1. Что изучает комбинаторика? Что такое комбинаторная задача?
- 6.2. Что такое  $n!$  ? Чему равен  $0!$  ?
- 6.3. Что называется перестановкой элементов множества, и по какой формуле она вычисляется?
- 6.4. Что называется размещением элементов множества, и по какой формуле оно вычисляется?
- 6.5. Что называется сочетанием элементов множества, и по какой формуле оно вычисляется?



6.6. Что изучает теория вероятностей?

6.7. Что называется случайным, достоверным и невозможным событием? Совместным и несовместным?

6.8. Укажите, какие из следующих событий невозможные, какие – достоверные, какие – случайные:

$A = \{ \text{футбольный матч «Спартак» - «Динамо» закончится вничью} \}$ ,

$B = \{ \text{вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее} \}$ ,

$C = \{ \text{в полночь выпадет снег, а через 24 часа будет светить солнце} \}$ ,

$D = \{ \text{завтра будет контрольная по математике} \}$ ,

$E = \{ \text{30 февраля будет дождь} \}$ ,

$F = \{ \text{вас изберут президентом США} \}$ ,

$G = \{ \text{вас изберут президентом России} \}$ .

6.9. Дайте определение вероятности случайного события.

6.10. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.

6.11. Что называют условной вероятностью?

6.12. Сформулируйте теорему умножения вероятностей независимых и зависимых событий.

6.13. Запишите формулу полной вероятности (формулу Байеса).

6.14. В каких случаях применяется формула Бернулли?

## ***7. Литература***

7.1. Н.В.Богомолов, П.И.Самойленко «Математика», §93, 94.

7.2. А.А.Дадаян «Математика», §§15.2-15.11.

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

1. Богомолов, Н.В. Математика: учеб. для ссузов/ Н.В.Богомолов, П.И. Самойленко.-М.: Дрофа, 2008.-395с.
2. Богомолов, Н.В. Сборник задач по математике: учеб. пособие для ссузов/ Н.В.Богомолов.-М.: Дрофа, 2010.-204с.
3. Выгодский, М.Я. Справочник по математике/ М.Я.Выгодский.- М.: АСТ: Астрель, 2010.-1055с.
4. Дадаян, А.А. Математика: Учебник.-М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2003.-552с.- (Серия «Профессиональное образование»).
5. Математика. В.П.Омельченко, Э.В.Курбатова.- Ростов н/Д: Феникс, 2009.
6. Филимонова, Е.В. Математика: Учебное пособие для средних специальных учебных заведений.- Ростов н/Д: Феникс, 2004.- 416с. (Серия «Среднее профессиональное образование»).
7. Шипачев, В.С. Основы высшей математики: Учеб. пособие для вузов/ В.С.Шипачев; Под ред. акад. А.Н.Тихонова.-М.: Высшая школа, 2003.- 497с.
8. [www.mathprofi.ru](http://www.mathprofi.ru) Дата обращения: 28.12.2012.

**Таблица значений тригонометрических функций**

$\alpha$	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	120° $\frac{2\pi}{3}$	135° $\frac{3\pi}{4}$	150° $\frac{5\pi}{6}$	180° $\pi$	210° $\frac{7\pi}{6}$	225° $\frac{5\pi}{4}$	240° $\frac{4\pi}{3}$	270° $\frac{3\pi}{2}$	300° $\frac{5\pi}{3}$	315° $\frac{7\pi}{4}$	330° $\frac{11\pi}{6}$	360° $2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$tg \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$ctg \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-